

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
170	18.03.25	Генерина А	
	1/2/3/4/5	Шифр	043112

4000

Задача 2. (1 часть)

Заметим, что $a^2 - a = a(a-1)$

1) Допустим $a \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$a-1 \notin \mathbb{Z} \quad \left(\begin{array}{c} \dots, \dots, a \\ \hline \dots, \dots, k \end{array} \right)$$

При этом последняя цифра в десятичной записи числа будет не совпадать, тогда $a(a-1) \notin \mathbb{Z}$
(ВЗ после запятой стоит 0 $\Rightarrow$)

$$k \cdot k = 0 \Rightarrow$$

k может быть только 0, противоречие, т.е.

$$a = \dots, \dots, k \quad \text{и} \quad a \notin \mathbb{Z}$$

Противоречие $\Rightarrow a \in \mathbb{Z}$ ЧТД.

Задача 1

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot ?$$

1) Возврем $\frac{x+y}{x-y}$ в квадрат

$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x^2 + y^2 &= \frac{5}{2}xy \\ x^2 + y^2 &= 2xy + \frac{xy}{2} \\ x^2 - 2xy + y^2 &= \frac{xy}{2} \end{aligned}$$

40

0000000000

70

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$(x-y)^2 = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2}xy$$

$$3) \quad x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

$$\cancel{x^2 + y^2 = 2xy + \frac{xy}{2}}$$

$$2xy + x^2 + y^2 = 2xy + \frac{5}{2}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{9}{2}xy$$

4) Тогда из п.2 и п.3 следует, что

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{9}{2}xy}{\frac{1}{2}xy} = \frac{9xy}{2} \cdot \frac{2}{xy} = \frac{9xy \cdot 2}{2 \cdot xy} = 9$$

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = 9 \Rightarrow$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{9} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 3 \\ \frac{x+y}{x-y} = -3 \end{cases}$$

По т.к. x и y положительные числа $x, x=y$

и $x > y$, то

$\frac{x+y}{x-y}$ не может быть равен $-3 \Rightarrow$

$$\frac{x+y}{x-y} = 3$$

Ответ: 3.

Задача 2 (2 часть)
Ели а и б можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Предположим $a^2 - a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
 $a(a-1) \in \mathbb{Z}$

Тогда

$$\begin{aligned} a^4 - a &= a(a^3 - 1) = a(a-1)(a^2 + a + 1) - \\ &= a(a-1)(a(a+1) + 1) \\ a(a-1) &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

если a - целое, то

$a+1$ тоже целое (Аналогично как в 1-й части решения) $\Rightarrow$

$a(a+1)$ целое (Аналогично как в 1-й части решения)

$a(a+1) + 1$ (целое (Аналогично как в 1-й части решения)) $\Rightarrow$

$a(a-1)(a(a+1) + 1)$ - целое · целое · целое $\Rightarrow$

Противоречие $\Rightarrow$

$$a \in \mathbb{Z}$$