Шифр 08957

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17	20.03.24	Хмылёва Т.Е	Т.Х

2 из условия 2) получим:

$(y-x)(y+x)-(y-x)>0$

$(*)$ $(y-x)(y+x-1)>0$, из условия 1) следует, что $(x+y)<1$, т.к. $0<x<\frac{1}{2}$ и $0<y<\frac{1}{2}$, значит $(y+x-1)<0$,
а т.к. все выражение $(*)$ >0, то и $(y-x)<0$,
т.е $x>y$. Докажем, что $y^3-x^3>y-x$.

$(y-x)(x^2+xy+y^2)-(y-x)>0$

$(y-x)((x^2+2xy+y^2)-1-2xy)>0$

$(y-x)((x+y)^2-1-\cancel{2}xy)>0$, т.к. $x>y$, то $(y-x)<0$, значит

$(x+y)^2-1-\cancel{2}xy<0$; т.к. $x+y<1$, то $(x+y)^2$ также <1, $(x+y)^2-1<0$, а x и $y>0$,
значит и $2xy$ - положительно, т.е

$(x+y)^2-1-\cancel{2}xy<0$ при любых x и y,
$0<x<\frac{1}{2}$; $0<y<\frac{1}{2}$, значит $y^3-x^3>y-x$

6б

① $n \in \mathbb{N}$, n - четырехзначно, $1111 \le n \le 9999$, сумма цифр S варьируется от 1 до 36. Можно уменьшать каждый разряд числа n на 1, тем самым уменьшать S на 1. Очевидно, что уменьшать разряд тысяч выгодно вплоть до единицы. Чтобы ~~дробь~~ частное было минимальным, n должно быть минимальным при максимальном S, т.е. использовать цифры „9" в n вполне выгодно. Если пользоваться перестановкой, то цифры должны следовать в n в порядке возрастания, т.к. например $1789 : 25 < 1987 : 25$ и любых др. перестановок. Рассмотрим $1999 : S$ для него равно 28, $\frac{1999}{28} = 71\frac{11}{28}$, что заметно меньше чисел с 2, 3, 4 и т.д. в разряде тысяч. Продолжая уменьшать n (уже в разряде сотен) можно получить $n = 1099$, $S = 19$, а $\frac{n}{S} = 57\frac{16}{19}$, при уменьшении n в разряде десятков мы будем терять уменьшение $\frac{n}{S}$, т.к. уменьшать S на 1 „дороже", чем уменьшать n на 10, т.к. n - четырехзначное, а S - максимум двузначное.

Таким образом минимальное частное достигается при $n = 1099$

Ответ: 1099

Док-ва нет!

Место для скобы

Шифр 08957

(3) Т.к. $P(17)=P(101)=2024$, то a_0 делится и на 17 и на 101, 101 не делится на 17, а 17 - простое, значит их НОК равен их произведению, т.е. 1717, что не удовл условию 1) $|a_0|<999$ значит $a_0=0$, а любые отрицательные a_0 также не будут удовл. условию, значит $a_0=0$ - единственно возможный вариант

Ответ: 0

15

(4) $\cos 2x + \cos^{2023} 2x + 2024\cdot\cos^{2025} 2x = \sin x + \sin^{2023} x + 2024 \sin^{2025} x$

$\cos 2x(1+\cos^{2022} 2x + 2024\cdot\cos^{2024} 2x) = \sin x(1+\sin^{2022} x + 2024\cdot\sin^{2024} x)$

$\cos 2x = \sin x = 0$?, т.к. $|\sin x|\leq 1$, $|\cos 2x|\leq 1$, а обе скобки ≥ 1 т.к. одно из слагаемых - единица, а обо других - в четной степени)

что не имеет решения, тогда

$\cos^{2022} 2x + 2024 \cos^{2024} 2x = \sin^{2022} x + 2024 \sin^{2024} x$

$\cos^{2022} 2x(1+2024\cos^2 2x) = \sin^{2022} x(1+2024\cdot\sin^{2024} x)$

тогда $\cos^{2022} 2x = \sin^{2022} x = 0$, что не имеет корней.

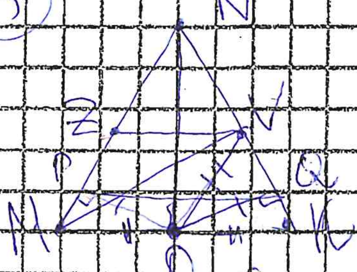
$1+2024\cos^{2024} 2x = 1 + 2024\cdot\sin^{2024} x$

$\cos^{2024} 2x = \sin^{2024} x$, что не имеет корней

Шифр 08957

Ответ: не имеет корней 0б

(5)



Решение:

1) Учитывая, что PQ не параллельна MK, а точки P, Q и др. не могут совпадать, то: максимальное расстояние мы получим при $M = P$, и $Q = V$, где V – вершина правильного тр-ка с основанием OK, где т. O – середина MK.

Увеличивая OQ нам придется увеличивать OP что мы не можем делать из-за помимо условия о непараллельности PQ и MK.

Расстояние между P и Q, тогда будет половиной высоты тр-ка MNK, т.к. V – середина NK (VK = NV):

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, а $h = \sqrt{3}$, т.е. макс. значение $PQ = \sqrt{3}$.

2) Минимальное значение PQ когда обе точки (P и Q) явл. основаниями высот из т. O к MN и NK, соотв-но, к тому же это значение недопустимо, т.к. $PQ \parallel MK$.

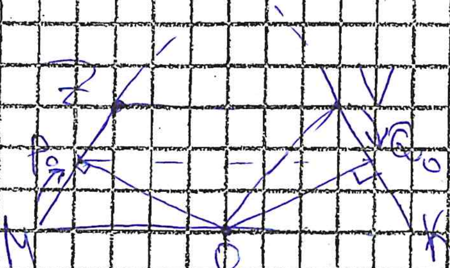
Это верно из условия о равноудаленности P и Q от O, что и использовалось в п. 1), во втором случае, PQ равно средней линии трапеции ZVKM.

$ZV = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{\sqrt{3}}$, а $PQ = \frac{ZV + MK}{2} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3}}$

Место для скобы

Шифр

Описать движения P и Q на MN и KN можно так:



Мы можем только уменьшать OQ, тогда нужно увеличивать OP, если говорить об их движении на рисунке, то Q движется от V к Q_0, а P от M к P_0, тогда

PQ принимает значения: $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}; \sqrt[4]{5}\right]$

Ответ: $PQ \in \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}, \sqrt[4]{3}\right]$

7Б