

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
145	20.03.25	Тещинский	
Шифр			918434

$$\begin{array}{r} 1/2/3/4/5 \\ 3/4/6/1/0 \end{array}$$

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2 = 49 + a^2 + b^2 + 14a - 2ab - 14b + 4 + b^2 + c^2 + 4b - 4c - 2bc + 81 + c^2 + a^2 + 18c - 2ac - 18a = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac - 4a - 10b + 14c + 134 = 134 + 14(a-b) + 4(b-c) + 18(c-a) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

Заметим, что данное выражение равно 134-ем при $a=b=c$

Порядком доказать, что меньше получить невозможно.

$$134 + 14(a-b) + 4(b-c) + 18(c-a) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 134 + (a-b)(a-b+14) + (b-c)(b-c+4) + (c-a)(c-a+18)$$

Заметим, что $(a-b)(a-b+14) \geq 0$ при $a=b$.

$$\begin{cases} a-b \leq 0 \\ a-b+14 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a-b \leq 0 \quad \text{минимум достигается при } a-b = -7, \text{ т.е. } f(a-b) = (a-b)^2 + 14(a-b)$$

$$f'(a-b) = 2(a-b) + 14 = 0$$

$$a-b = -7$$

аналогичным образом решим $(b-c)(b-c+4) \leq 0$.

$$\begin{cases} b-c \leq 0 \\ b-c+4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow b-c \leq 0 \quad \text{минимум достигается при } b-c = -2$$

$$f(b-c) = (b-c)^2 + 4(b-c)$$

$$f'(b-c) = 2(b-c) + 4 = 0$$

$$b-c = -2$$

при $(b-c) = -2$

аналогичным образом решим $(c-a)(c-a+18) \leq 0$.

$$\begin{cases} c-a \leq 0 \\ c-a+18 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow c-a \leq 0 \quad \text{минимум достигается при } c-a = -9$$

$$f(c-a) = (c-a)^2 + 18(c-a)$$

$$f'(c-a) = 2(c-a) + 18 = 0$$

$$c-a = -9$$

Минимум достигается при $c-a = -9$.

Тогда это будет наименьшее выражение было меньше 134-ем,

$$f(a-b) + f(b-c) + f(c-a) \leq 0$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			918434

$$\begin{cases} 4(a-b) < 0 \\ 4(b-c) < 0 \\ 4(c-a) < 0 \end{cases} \text{ не имеет решений т.к. } \begin{cases} b > a \\ c > b \\ a > c \end{cases}$$

Пусть $-14 < a-b < 0$, тогда $-14 < a < b$, тогда

$$\begin{aligned} (b-c-14)(b-c) &\leq 4(c-a) \leq (c-b)(c-b+18) \\ (b-c-14)(b-c-32) &\leq 4(c-a) \leq (b-c)(b-c-18) \\ &\leq 4(c-a) + 4(b-c) \leq (b-c)(b-c-18) + (b-c)(b-c+14) \\ (b-c)^2 - 32(b-c) - 14(b-c) + 14 \cdot 32 &\leq 4(c-a) + 4(b-c) \leq g(b,c) \\ (b-c)^2 - 46(b-c) + 14 \cdot 32 &\leq 4(c-a) + 4(b-c) \leq g(b,c) \\ -9 &\leq 4(c-a) + 4(b-c) \leq g(b,c) \\ (\text{при } b-c=23) &\end{aligned}$$

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Заметим, что $P(x) = x^2(Q(x)) - x + 506$, тогда $P(x_1) = -x_1 + 506$

$$\begin{aligned} P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) &= \\ = 2024 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x_1) &= -x_1 + 506 \\ P(x_2) &= -x_2 + 506 \\ P(x_3) &= -x_3 + 506 \\ P(x_4) &= -x_4 + 506 \end{aligned}$$

40

$$\begin{aligned} x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 &= \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0 \\ (\sqrt{x^2+1})^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 3^2 &= \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} + 1 = 0 \\ (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 &= \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{т.к. } (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 &\geq 0 \text{ и } \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} + 1 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sqrt{x^2+1} - 3)^2 &= 0 \text{ и } \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x^2+1} &\geq 0 \Rightarrow \\ \sqrt{x^2+1} &\geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

60

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\begin{cases} (\sqrt{x^2+1}-3)^2=0 \\ \cos \frac{x^2+x\sqrt{2}-4}{18}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+1=9 \\ \frac{x^2+x\sqrt{2}-4}{18}=2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{8} \\ \frac{x^2+x\sqrt{2}-4}{18}=36\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

подставим $x=\sqrt{8}$ в (1):

$$\frac{8+4-4}{18}=2\pi k \Rightarrow 8=36\pi k \text{ не выполняется при } k \in \mathbb{Z}$$

$x=-\sqrt{8}$ в (2):

$$\frac{8-8}{18}=2\pi k$$

$0=2\pi k$ выполняется при $k=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\sqrt{8}$ - корень ур-ня.

Ответ: $x=-\sqrt{8}$

ИЧ.

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$g\text{-то: } (x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Пусть $n=1$: $x_1^0 = x_1 \Rightarrow x_1=1$

$n=2$: $x_1 + x_2 = x_1 x_2 \Rightarrow x_1=2, x_2=2$, пусть $n=1$:

$1+x_2=x_2 \Rightarrow x_2 \in \emptyset$ нет

рассм $n=3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1 x_2 x_3 \text{ подставим } x_1=2$$

$$8+x_3^2=4x_3 \text{ реш нет.}$$

Значит не существует набора натуральных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, для которых $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$, т.к. не может выполняться условие $x_1=1$ а также если $n>1$ т.к. в формуле

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Не существует такого набора $x_1, x_2, \dots, x_n$, чтобы
выполнилось условие $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$,
т.к. при подстановке $n=1$ и x_1 только $=1$, а при
подстановке $n=2$ x_1 и x_2 могут быть 2 и 2, но
других решений нет. Однако в условии
задачи прописано "чисел", а значит $n \geq 2$.
при подстановке в $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1 x_2 x_3$
и чисел $x_1=2$ и $x_2=2$ (которые мы назвали
пробой эмале) x_3 не существует (в смысле
действит. чисел), а значит доказывать нер-во
 $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$ нет смысла.