Место для скобы

Шифр 08960

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
15	20.03.24	Хмылёва Т.Е	ТХм

№1 $\overline{abcd} : (a+b+c+d) - min$

Т.к. отношение должно быть минимально, то нам лучше взять число, которое является одним из самых маленьких среди четырехзначных, т.е. от 1000 до 2000, т.к. частное тоже минимально, то число должно быть мало, а сумма его цифр как можно больше.

Проверим некоторые числа:

$1100 : 2 = 550$; $1999 : 28 = 71\frac{11}{28}$; $1099 : 19 = 57\frac{16}{19}$

$1009 : 10 = 100,9$; $1199 : 20 = 59,95$; $1098 : 18 = 61$

Получаем, что это число 1099

2,5

нет док-ва

Ответ: 1099

№2 $0 < x < \frac{1}{2}$ $0 < y < \frac{1}{2}$

$y^2 - x^2 > y - x$

$(y-x)(y+x) > y - x$

$(y-x)(y+x-1) > 0$

Т.к. $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$, то

$y + x - 1 < 0 \Rightarrow y - x < 0$

2-тб: $y^3 - x^3 > y - x$

$(y-x)(y^2 + xy + x^2) > y - x$

$(y-x)(y^2 + x^2 + xy - 1) > 0$

Т.к. $y - x < 0$, то

$y^2 + x^2 + xy - 1 < 0$

$(x+y)^2 - 1 - xy < 0$

Место для скобы

Шифр 08960

Т.к. $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$, то $(x+y)^2 - 1 < 0$, $-xy < 0$,

то $\Rightarrow y^3 - x^3 > y - x$

№ 4

$$\cos 2x + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x) = \sin x + \sin^{2023} x + 2024\sin^{2025} x$$

$$\cos(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2x\right) + \sin^{2023}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2x\right) + 2024\sin^{2025}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2x\right) = \sin x + \sin^{2023} x + 2024\sin^{2025} x$$

$$\frac{\pi}{2} \pm 2x = x$$

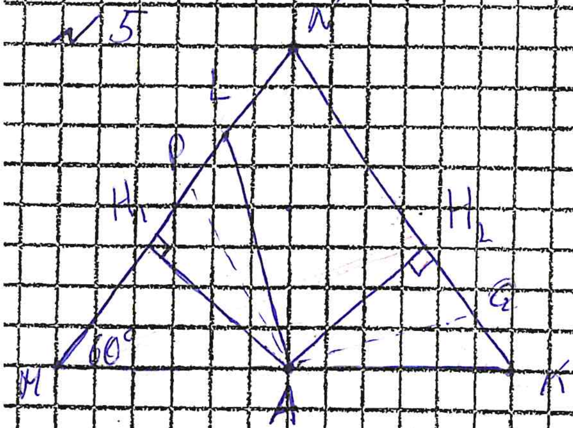
$$\pi - x = \frac{\pi}{2} \pm 2x$$

$$\frac{\pi}{2} + 2x = x \qquad \frac{\pi}{2} - 2x = x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \qquad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$

№ 5



Дано: $\triangle MNK$ - равностор.,

$P \in MN$, $Q \in NK$, $AP = AQ$

$S_{MNK} = 1$

Найти PQ

Решение:

1. Проведем AL, $AL = AM = AK$
2. Точка $P \in$ между т. H_1 и L, а точка $Q \in$ между т. H_1 и K
3. $S_{MNK} = 1 = \frac{MK^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow MK = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, $AK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
4. $\angle MAH_1 = 30° = \angle H_1AL$ (т.к. $\angle AMN = 60°$), $\angle KAH_2 = 30°$
5. $AH_1 = \frac{S}{P_{NK}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} = H_1A$

скобы

Шифр 08960

6. $\angle HAH_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

7. $H_1H_2^2 = AH_1^2 + AH_2^2 + 2AH_1 \cdot AH_2 \cos 120^\circ = 3AH_1^2$

$H_1H_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^3}$

8. $\angle LAK = 120^\circ$

9. $LK^2 = AL^2 + AK^2 + 2AL \cdot AK \cos 120^\circ = 3AK^2$

$LK = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{3}$

$\Rightarrow$ PQ изменяется от $\sqrt[4]{3}$ до $\sqrt[4]{3^3}$

Ответ: от $\sqrt[4]{3}$ до $\sqrt[4]{3^3}$

6б