

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
17		Коржаченко	М
Шифр			04.01.12

№1 м.к. $x, y > 0$

$$x^2 + y^2 = 2 \frac{4}{3} xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = \frac{4}{3} xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3} xy$$

м.к. $x > y$ (усл.)

$$x^2 + y^2 = -2xy + 2 \frac{10}{3} xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3} xy \quad \text{м.к. } x, y > 0 \Rightarrow x+y = \sqrt{\frac{16}{3} xy}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{16xy}{3}}}{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{4xy}{3}}$$

м.к. $x, y > 0 \Rightarrow$ обе части положит. $\Rightarrow$ можно
прав. вывести в квадрат. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{16xy} \cdot 3}{3 \cdot 4xy} = \sqrt{4} \quad \text{Ответ: } 4$$

1	2	3	4	5	Σ
5	0	7	4	1	17

№3

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{2n(n^2-1) + (n^4-1)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n^2-1)(n^2+2n+1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}$$

Рассмотрим числитель:

$(n-1)$ даёт множителя $[1; 98]$

$(n+1)^3$ даёт $3^3; 4^3; 5^3; \dots; 100^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ числитель в нашем Π даёт $1 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4 \cdot \dots \cdot 98^4 \cdot 99^3 \cdot 100^3$

м.к. в знаменателе все z числа $\in [2; 99]$ в 4 степени

$$\Rightarrow \Pi = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4 \cdot \dots \cdot 98^4 \cdot 99^3 \cdot 100^3}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4 \cdot \dots \cdot 99^4} = \frac{10^6}{2^3 \cdot 99} = \frac{2^3 \cdot 5^6}{99} \quad \text{Ответ: } \frac{2^3 \cdot 5^6}{99}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№4

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0 \quad X_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}}{2} \quad X_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}}{2}$$

$$\left(\frac{-p - \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}}{2} \right)^4 + \left(\frac{-p + \sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}}}{2} \right)^4 = X_1^4 + X_2^4$$

$$\left(p^2 + p^2 + \frac{2}{p^2} - 2p\sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}} \right)^2 + \left(p^2 + p^2 + \frac{2}{p^2} + 2p\sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}} \right)^2$$

$$2p^2 + \frac{2}{p^2} = a$$

$$2p\sqrt{p^2 + \frac{2}{p^2}} = b \Rightarrow (a-b)^2 + (a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab + a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1^4 + X_2^4 = \frac{2a^2 + 2b^2}{2^4} = \frac{4p^4 + \frac{4}{p^4} + 8 + 4p^2(p^2 + \frac{2}{p^2})}{2^3}$$

$$= \frac{p^4 + \frac{1}{p^4} + 2 + p^4 + 2}{2} = \frac{2p^4 + 4 + \frac{1}{p^4}}{2} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} = X_1^4 + X_2^4$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \sqrt{2}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{p^4 + \frac{1}{2p^4}} \geq 0 \quad p^4, \frac{1}{2p^4} \geq 0 \quad (p \neq 0) \Rightarrow \text{возвращим в квадрат.}$$

$$p^8 + 1 + \frac{1}{4p^8} \sqrt{2}$$

$$p^8 + \frac{1}{4p^8} \sqrt{1} \quad t = p^8 \quad 4t^2 - 4t + 1 \geq 0 \quad \text{график - парабола ветви } \uparrow$$

график - парабола ветви $\uparrow$

$$D = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0 \Rightarrow X_1^4 + X_2^4 \geq 2 + \sqrt{2} \quad (\text{т.к. имеет общ. м.})$$

с 0 и остальные зн. > 0

№5

Дано:

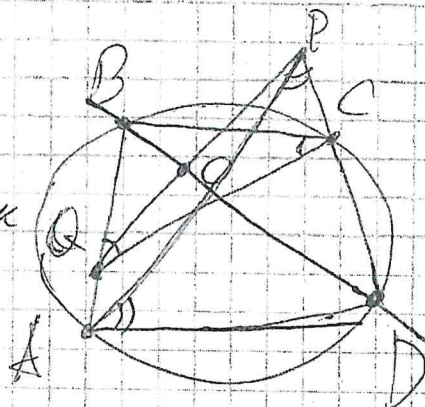
$ABCD$ - впис. четырехугольник

$$DP = DA$$

$$BQ = BC$$

$$D-мб: QO = OP$$

$D-во$:



т.к. $ABCD$ - впис. чет. $\Rightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$

$\triangle ADP$ - р/с (окр.) ($DP = DA$)

$\triangle BCQ$ - р/с (окр.) ($BQ = BC$) $\Rightarrow \angle PAD = \angle APD$ (в-во)
 $\angle BQC = \angle BCQ$ (в-во)

И?

№2

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3abc \text{ (средн. геом.)}$$

$$ab + bc + ac \geq 1$$

$$ab + bc + ac \geq 3abc \text{ (средн. геом.)}$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac \quad \checkmark$$