Место для скобы

Шифр ФФ-11-48

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
84			

Задача № 1.

Дано:

$CD \in$ ГОО

$BC \perp$ ГОО

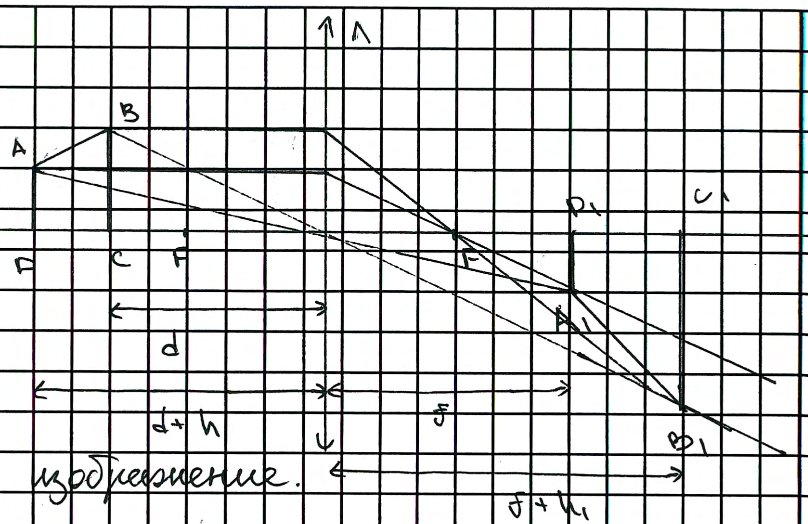
$AD \perp$ ГОО

$Г_1 = 1{,}2$

$Г_2 = 4$

$BC = 2AD$

$\frac{S_1}{S_0} - ?$



Пусть $A_1B_1C_1D_1$ - изображение.

$\left.\begin{matrix} AD \perp ГОО \\ BC \perp ГОО \end{matrix}\right| \Rightarrow AD \parallel BC$ - основания $\Rightarrow \left.\begin{matrix} A_1D_1 \perp ГОО \\ B_1C_1 \perp ГОО \end{matrix}\right| \Rightarrow A_1D_1 \parallel B_1C_1$ - основания.

$CD \in ГОО \Rightarrow C_1D_1 \in ГОО \Rightarrow$ CD - высота, C_1D_1 - высота.

Пусть $CD = h$, $C_1D_1 = h_1$, $AD = x$, $BC = 2x$

Тогда $S_0 = \frac{BC + AD}{2} \cdot CD = \frac{3x}{2} h = \frac{3}{2} x h$

$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{f}{d+h} = \frac{6}{5} \Rightarrow A_1D_1 = \frac{6}{5} AD = \frac{6}{5} x$

$f = \frac{6}{5}(d+h)$

$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{f+h_1}{d} = 4 \Rightarrow B_1C_1 = 4BC = 8x$

$f + h_1 = 4d.$

УТЛ: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f+h_1}$ (для прямой BC) $\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d+h} + \frac{1}{f}$ (для прямой AD).

$$\begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{f+h_1} = \frac{1}{d+h} + \frac{1}{f} \\ f = \frac{6}{5}(d+h) \\ 4d = f + h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{d} + \frac{1}{f+h_1} = \frac{1}{d+h} + \frac{1}{f} \\ d = \frac{6h + 5h_1}{14} \\ f = \frac{12h + 3h_1}{7} \end{cases}$$

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

№ 1 (продолжение).

$$\frac{14}{6h+5h_1}+\frac{7}{12h+10h_1}=\frac{14}{20h+5h_1}+\frac{7}{12h+3h_1}$$

$$\frac{2}{6h+5h_1}+\frac{1}{2(6h+5h_1)}=\frac{2}{5(4h+h_1)}+\frac{1}{3(4h+h_1)}$$

$$\frac{5}{2(6h+5h_1)}=\frac{11}{15(4h+h_1)}$$

$$75(4h+h_1)=22(6h+5h_1)$$

$$168h=35h_1$$

$$h_1=\frac{168}{35}h.=4{,}8h$$

$$S_1=\frac{A_1D_1+B_1C_1}{2}\cdot C_1D_1=\frac{1{,}2x+8x}{2}\cdot 4{,}8h=\frac{552}{25}xh.$$

$$\frac{S_1}{S_0}=\frac{552\cdot 2}{25\cdot 3}=14{,}72.$$

Ответ: 14,72.

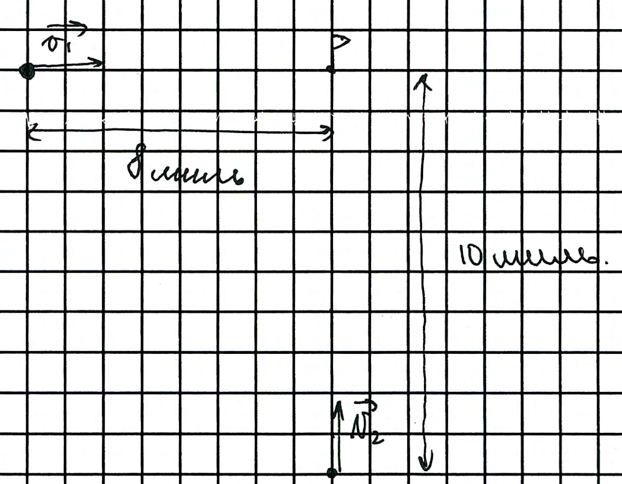
№ 2.

$v_1=8$ миль/ч.

$v_2=10$ миль/ч.

$a_1=a_2=a$.

a — ?



Траектории движения кораблей перпендикулярны ⇒ ⇒ чтобы оказаться на одной прямой второму кораблю надо пройти ровно 10 миль (согласно условию, ② корабль первым приходит на т. пересечения траекторий)

$S_2=10$ миль.

Расстояние до т. пересеч. траекторий от первого корабля равно 8 миль ⇒ когда ② пройдет S_2, то ① $S_1 \leq 7$ миль (т.к. по условию:
1) ② приходит первым)
2) расстояние м/у кораблями не меньше 1 мили)

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

48

№ 2 (продолжение)

Пусть a - искомое ускорение кораблей
t - время, за которое ② корабль преодолевает расстояние S_2

Тогда:

$$\begin{cases} S_2 = v_2 t + \frac{at^2}{2} \\ S_1 \geq v_1 t + \frac{at^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} t^2 + v_2 t = S_2 \\ \frac{at^2}{2} + v_1 t \leq S_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{S_2 - v_2 t}{t^2}$$

$$S_2 - v_2 t + v_1 t \leq S_1$$

$$t_1 (v_1 - v_2) \leq S_1 - S_2$$

$$t_1 \leq \frac{S_1 - S_2}{v_1 - v_2}$$

$$t_1 \leq -1,5$$

$$t \geq 1,5$$ $\Rightarrow$ Время движения должно быть не меньше полутора часов

$$a = \frac{2S_2}{t^2} - \frac{2v_2}{t}$$ Найдем минимальное ускорение с помощью производной

$$a'_t = -\frac{4S_2}{t^3} + \frac{2v_2}{t^2} = 0$$

$$\frac{2v_2}{t^2} = \frac{4S_2}{t^3} \rightarrow t = \frac{4S_2}{2v_2} = \frac{4 \cdot 10}{2 \cdot 10} = 2 ч.$$

$\Rightarrow$ $t = 2$ - точка минимума

$\Rightarrow$ $a(2)$ - минимальное ускорение.

$$a(2) = \frac{2S_2}{2^2} - \frac{2 \cdot v_2}{2} = \frac{2 \cdot 10}{4} - \frac{2 \cdot 10}{2} = -5 \text{ миль}/ч^2.$$

Ответ: $a = -5$ миль/ч^2

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

№ 4

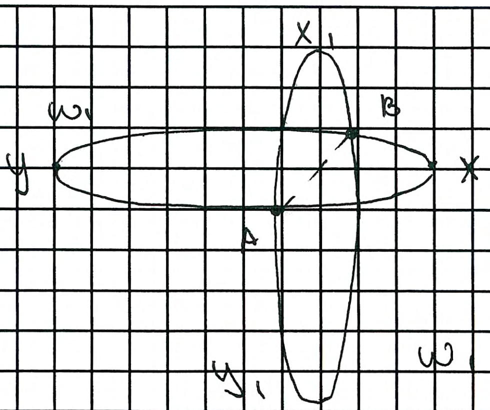
$\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$S_1 = S_2 = S$

$r_1 = r_2 = r$

$x = \frac{1}{3} l$

$\frac{R_0}{R_1}$ - ?



R_0 — сопротивление одного кольца

$R_0 = \rho \frac{2\pi r}{S}$

Окружности ω_1 и ω_2 равны ⇒ AB — общая хорда ($\omega_1 \cap \omega_2 = AB$) ⇒ AB отсекает от обеих окружностей равные дуги.

$\Rightarrow x_1 = x_1 = \frac{1}{3} l$

$l = 2\pi r \Rightarrow \frac{2\pi r}{3}$

Пусть y и y_1 — длины оставшихся дуг, тогда

$y = y_1 = l - x = \frac{2}{3} 2\pi r = \frac{4\pi r}{3}$.

Сопротивление меньших дуг − x

$R_x = R_{x_1} = \frac{\rho 2\pi r}{3S}$

Сопротивление больших дуг − y

$R_y = R_{y_1} = \frac{\rho 4\pi r}{3S}$.

Все дуги пересекаются с остальными в двух точках A и B ⇒ дуги соединены параллельно

$\Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_y} = \frac{2}{R_x} + \frac{2}{R_y}$

$\frac{1}{R_1} = \frac{6S}{2\pi r \rho} + \frac{6S}{4\pi r \rho} = \frac{18S}{4\pi r \rho} = \frac{9S}{2\pi r \rho}$

$R_1 = \rho \frac{2\pi r}{9S}$.

$\frac{R_0}{R_1} = \frac{\rho \frac{2\pi r}{S}}{\rho \frac{2\pi r}{9S}} = 9$

Ответ: 9

20

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

№ 3

$m_1 = 3$ кг.
$m_2 = 4$ кг.
$m_a = 1$ кг.
$\Delta T_{ц} = 5°C$
$T_1 = 10°C$
$N = 20$

$T_2 - ?$

Рассмотрим, что происходит за один цикл:

1) Кубик из ② ~~сос~~ сосуда (с горячей водой) перемещают в в ① сосуд (с холодной водой)
2) После установления теплового баланса в ① сосуде, кубик перемещают обратно во ~~вл~~ ② сосуд и ~~д~~ вновь дожидаются установления теплового равновесия.

После 20 циклов ~~температура~~ разница температура воды в обоих сосудах ~~выравниваются. $T_0 = 5°C$~~ составляет $\Delta T = 5°C$
$(\Delta T = T_{02} - T_{01})$

Рассмотрим n-ый цикл: Температура в сосудах до цикла: ~~T_1~~ в ①: T_1^*
в ②: T_2^*

После цикла: в ①: Θ_1^*
в ②: Θ_2^*

~~УТБ~~ УТБ:

$$c_в m_1 (\Theta_1^* - T_1^*) = c_a m_a (T_2^* - \Theta_1^*)$$
$$c_a m_a (\Theta_2^* - \Theta_1^*) = c_в m_2 (T_2^* - \Theta_2^*)$$

Теплота, которую получила вода в первом сосуде:

$$Q_1^* = c_в m_1 (\Theta_1^* - T_1^*)$$

Теплота, которую отдала вода во ② сосуде:

$$Q_2^* = c_в m_2 (T_2^* - \Theta_2^*)$$

Теплота, которую ~~получил~~ отдал кубик:

$$Q_к^* = c_a m_a (\Theta_1^* - T_2^*) + c_a m_a (\Theta_2^* - \Theta_1^*)$$

$$Q_к^* = c_a m_a (\cancel{\Theta_1^*} - T_2^* + \Theta_2^* - \cancel{\Theta_1^*})$$
$$Q_к^* = c_a m_a (\Theta_2^* - T_2) < 0 \Rightarrow$$ кубик отдает теплоту

$$|Q_к^*| = c_a m_a (T_2^* - \Theta_2^*).$$

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

№ 3 (продолжение)

Тогда ~~его~~ общее кол-во теплоты, полученной водой в ① ~~его~~ сосуде:

$$Q_1' = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_{20}$$

T_1 - начальная температура.
Θ_i - температура после i цикла.
T_{01} - конечная температура. (после 20 циклов)

$$Q_1^{\Sigma} = c_в m_1 (\cancel{\Theta_1} - T_1 + \Theta_2 - \cancel{\Theta_1} + \dots + T_0 - \Theta_{19})$$

$$Q_1^{\Sigma} = c_в m_1 (T_{01} - T_1)$$

Общее кол-во теплоты отданное водой в ② сосуде.

$$Q_2^{\Sigma} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_{20}$$

T_2 - начальная температура.
γ_i - температура после i цикла.
T_{02} - конечная температура (после 20 циклов)

$$Q_2^{\Sigma} = c_в m_2 (T_2 - \cancel{\gamma_1} + \cancel{\gamma_1} - \gamma_2 + \dots + \gamma_{19} - T_{02})$$

$$Q_2^{\Sigma} = c_в m_2 (T_2 - T_{02})$$

Общее кол-во теплоты отданное кубиком.

$$Q_к^{\Sigma} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{20}.$$

T_2 - начальная температура кубика (изначально кубик был в ② сосуде)
α_i - температура кубика после i цикла.
T_{02} - конечная температура кубика (после 20 циклов) (в конце кубик во 2 сосуде)

$$Q_к^{\Sigma} = c_а m_а (T_2 - \alpha_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \dots + \alpha_{19} - T_{02})$$

$$Q_к^{\Sigma} = c_а m_а (T_2 - T_{02})$$

УТБ для 20 циклов ~~теплоты~~:

$$Q_1^{\Sigma} = Q_к^{\Sigma} + Q_2^{\Sigma}$$

$$c_в m_1 (T_{01} - T_1) = c_а m_а (T_2 - T_{02}) + c_в m_2 (T_2 - T_{02})$$

$$\Delta T = T_{02} - T_{01} \Rightarrow T_{01} = T_{02} - \Delta T$$

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

№ 3 (продолжение)

$$c_в m_1 (T_{02} - \Delta T - T_1) = c_a m_a T_2 - c_a m_a T_{02} + c_в m_2 T_2 - c_в m_2 T_{02}$$

$$c_в m_1 T_{02} - c_в m_1 \Delta T - c_в m_в T_1 = (c_a m_a + c_в m_2) T_2 - (c_в m_2 + c_a m_a) T_{02}$$

$$T_{02} (c_в (m_1 + m_2) + c_a m_a) - c_в m_1 (\Delta T + T_1) = (c_a m_a + c_в m_2) T_2$$

Рассмотрим первый цикл:

$$c_в m_1 (\Theta_1 - T_1) = c_a m_a (T_2 - \Theta_1)$$
$$c_a m_a (\Theta_2 - \Theta_1) = c_в m_2 (T_2 - \Theta_2)$$

$$\Theta_1 = \frac{c_a m_a T_2 + c_в m_1 T_1}{c_a m_a + c_в m_1} = \frac{T_2 + 140}{15}$$

$$\Rightarrow \Theta_2 = \frac{c_a m_a T_2 + c_в m_1 T_1}{c_в m_1 + c_a m_a} = \frac{281 T_2 + 140}{295}$$

Заметим, что $T_2 - T_1 = X$ (разница начальных температур)

$\Theta_2 - \Theta_1 = \frac{784}{885} X$ (разница конечных температур)

Значит после каждого цикла разница температур уменьшается в $\frac{784}{885}$ раз. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T_{02} - T_{01} = \Delta T = \left(\frac{784}{885}\right)^{20} (T_2 - T_1)$$

$$\Delta T = \left(\frac{784}{885}\right)^{20} T_2 - \left(\frac{784}{885}\right)^{20} T_1$$

$$T_2 = \Delta T \cdot \left(\frac{885}{784}\right)^{20} + T_1 = \left(\frac{885}{784}\right)^{20} \cdot 5 + 10 =$$

$$\approx 66,43 \ ^\circ C$$

Ответ: $T_2 \approx 66,43 \ ^\circ C$.

Место для скобы

Шифр Ф1Ф-11-48

№ 5

$L = 10$ см

$H = 1$ см

$d = 2$ мм.

$\varepsilon = 4$.

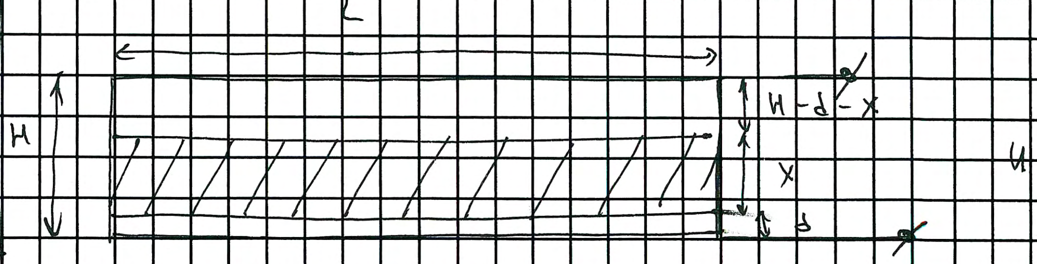
$E = 20 \cdot 10^6$ В/м

$U = 400 \cdot 10^3$ В

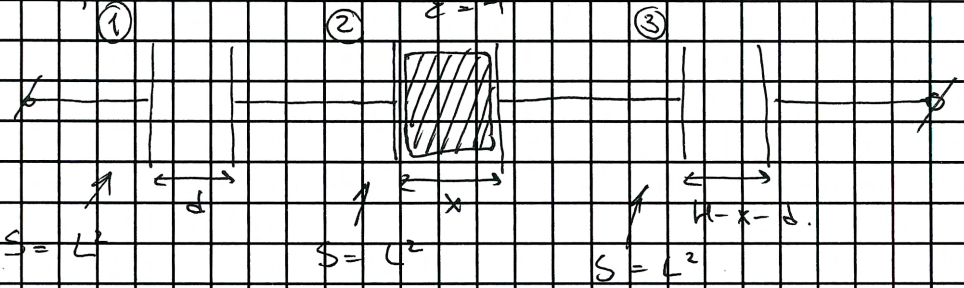
$V = 25 \cdot 10^{-6}$ м^3

$x - ?$

Начальное состояние.



Исходную конструкцию можно рассмотреть в виде системы из 3-х конденсаторов различной емкости, соединенных последовательно



1 : $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{d}$ 2 : $C_2 = \dfrac{\varepsilon \varepsilon_0 L^2}{x}$ 3 : $C_3 = \dfrac{\varepsilon_0 L^2}{H-x-d}$.

$$\frac{1}{C_\Sigma^0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2} + \frac{x}{\varepsilon\varepsilon_0 L^2} + \frac{H-x-d}{\varepsilon_0 L^2}.$$

$$\frac{1}{C_\Sigma^0} = \frac{\cancel{\varepsilon d} + x + \varepsilon H - \varepsilon x - \cancel{\varepsilon d}}{\varepsilon \varepsilon_0 L^2}.$$

$$\frac{1}{C_\Sigma^0} = \cancel{\varepsilon H - \varepsilon x \varepsilon}$$

$$\frac{1}{C_\Sigma^0} = \frac{x(1-\varepsilon) + \varepsilon H}{\varepsilon \varepsilon_0 L^2}.$$

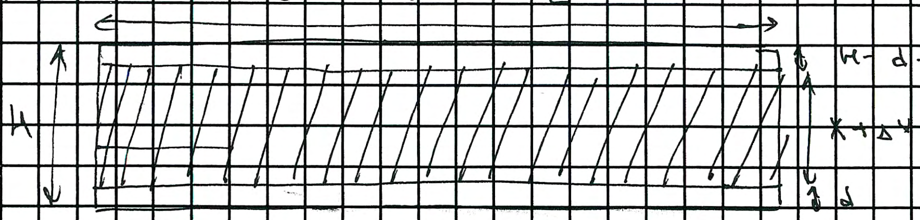
$$C_\Sigma^0 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L^2}{x(1-\varepsilon) + \varepsilon H} \Rightarrow q_1 = C_\Sigma \cdot U_\Sigma = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L^2 U}{\varepsilon H - x(\varepsilon - 1)}$$

Место для скобы

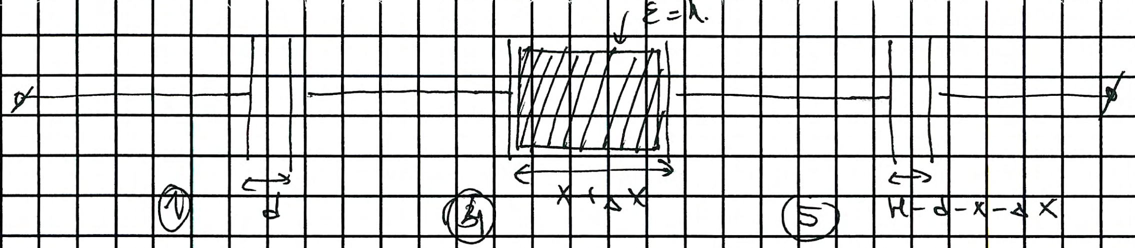
Шифр Ф1Ф-11-48

№5 (продолжение)

Конечное состояние.



Рассмотрим как систему из 3-х конденсаторов, соединенных последовательно.



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} \qquad C_4 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L^2}{x+\Delta x} \qquad C_5 = \frac{\varepsilon_0 L^2}{H-d-x-\Delta x}$$

$$C_\Sigma = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L^4}{\cancel{\varepsilon d} + x + \Delta x + \varepsilon H - \cancel{\varepsilon d} - \varepsilon x - \varepsilon \Delta x}$$

$$C_\Sigma = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L^2}{\varepsilon H - (x+\Delta x)(\varepsilon - 1)} \Rightarrow q = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 L^2 U}{\varepsilon H - (x+\Delta x)(\varepsilon-1)}$$

$$U_4 = \frac{q_4}{C_4} = \frac{\cancel{\varepsilon}\cancel{\varepsilon_0}\cancel{L^2}\, U \,(x+\Delta x)}{(\varepsilon H - (x+\Delta x)(\varepsilon-1))\cancel{\varepsilon\varepsilon_0 L^2}}$$

$$U_4 = \frac{U(x+\Delta x)}{\varepsilon H - (x+\Delta x)(\varepsilon - 1)}$$

Произошел пробой => ~~$Ed = U_п$~~

$$E(x+\Delta x) = U_4$$

$$E\,\cancel{(x+\Delta x)} = \frac{U\cancel{(x+\Delta x)}}{\varepsilon H - (x+\Delta x)(\varepsilon-1)}$$

$$E(\varepsilon H - (x+\Delta x)(\varepsilon - 1)) = U$$

$$\Delta x = \frac{V}{L^2}$$

№ 5 (продолжение)

$$E\varepsilon H - E(\varepsilon-1)x - E(\varepsilon-1)\Delta x = U.$$

$$E\varepsilon H - E(\varepsilon-1)\frac{V}{L^2} - U = E(\varepsilon-1)x$$

$$x = \frac{E\varepsilon H - E(\varepsilon-1)\frac{V}{L^2} - U}{E(\varepsilon-1)}$$

$$x = \frac{20\cdot 10^6\cdot 4\cdot 0{,}01 - 20\cdot 10^6(4-1)\cdot\frac{25\cdot 10^{-6}}{0{,}1^2} - 400\cdot 10^3}{20(4-1)\cdot 10^6} \approx \frac{1}{240}$$

$$\approx 4{,}17\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

$$x \approx 4{,}17\ \text{мм}.$$

Ответ: $x = 4{,}17$ мм.