

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
185	14.03.25	Луганс Н.А.	

Шифр 025-2-11-73

1) $\frac{x+y}{x-y}$, если $x^2 + y^2 = \frac{5}{2xy}$ при $x > y$.

1. $x^2 + 2xy + y^2 = \frac{5}{2xy} + 2xy$

$(x+y)^2 = \frac{5}{2}xy$

2. $x^2 - 2xy + y^2 = \frac{5}{2xy} - 2xy$

$(x-y)^2 = \frac{1}{2}xy$

$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{5}{2}xy}{\frac{1}{2}xy}$

$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = 9$

$\frac{x+y}{x-y} = 3$

$x+y = 3x-3y$

$x-3x = -y-3y$

$-2x = -4y$

$x = 2y$

$x > y$ - удовлетворяет
условие задачи

Ответ: 3

или

$\frac{x+y}{x-y} = -3$

$x+y = -3x+3y$

$x+3x = -y+3y$

$4x = 2y$

$x = \frac{y}{2}$

$x < y$ - не удовлетворяет
условие задачи

2) $a^2 - a$ и $a^4 - a$ - целые числа

Доказательство:

$\mathbb{Z}$ - целое число

$(a^4 - a) \in \mathbb{Z}$ и $(a^2 - a) \in \mathbb{Z}$

$a^4 - a = a(a^3 - 1) = a(a-1) \cdot (a^2 + a + 1) = \underbrace{(a^2 - a)}_{\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{(a^2 + a + 1)}_{\mathbb{Z}}$

Следует:

$((a^2 - a) + (2a + 1)) \in \mathbb{Z}$

$(2a + 1) \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2a \in \mathbb{Z}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-М-73

Если $a \notin \mathbb{Z}$, то $a = \pm \frac{1}{2}$

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow (a^2 - a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (a^2 - a) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

Значит, для любой a , $a \in \mathbb{Z}$

43) Известно, что при перекидывании лблика средний вес увеличивается на 3 г, что составляет 3%.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{3 \text{ г}}{3\%} = \frac{x \text{ г}}{100\%}$$

$$x = \frac{100\% \cdot 3 \text{ г}}{3\%}$$

$$x = 100$$

Средний вес всех лбликов составляет 100 г.

Ответ: 100 г.

34) Пусть $a_n = 1 - \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$

$$a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 \dots a^{79} = ?$$

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{4} \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

$$n = 79 \Rightarrow a_{79} = \left(1 - \frac{1}{79}\right) \left(1 + \frac{1}{79}\right)^3 = \frac{78}{79} \left(\frac{80}{79}\right)^3$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

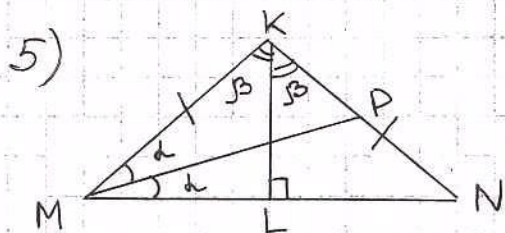
Шифр 025-2-М-73

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_{79} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^3 \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{5}{4} \right)^3 \cdot \frac{78}{79} \left(\frac{80}{79} \right)^3 =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 78}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{79} \cdot 80)^3}{(\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{79})^3} = \frac{80^3}{79 \cdot 2^3} = \frac{40^3}{79} =$$

$$= \frac{64000}{79} \sqrt{2} \cdot 810 \frac{10}{79} \checkmark$$

Ответ: $810 \frac{10}{79}$ 45



Решение:

KL - биссектриса, высота,
медиана. ✓

KL = x, а MP = 2x ✓

Δ MKL: KL = x ⇒ ∠KML = 2α; ∠MKL = β

По теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{MK}{\sin 90^\circ}$$

$$MK = \frac{x}{\sin 2\alpha}$$

Δ MKP: MK = $\frac{x}{\sin 2\alpha}$ ✓

MP = 2x ✓

∠MKN = 2β; ∠KMP = γ

$$\frac{2x}{\sin 2\beta} = \frac{x}{\sin 2\alpha \cdot \sin (180^\circ - \alpha - 2\beta)} \Rightarrow \sin 2\beta = 2 \sin 2\alpha \cdot \sin (\alpha + 2\beta)$$

2α + β = 90° в Δ MKL, значит α = 90° - β

$$\sin 2\beta = \frac{2 \sin (180^\circ - 2\beta) \cdot \sin (90^\circ - \beta)}{\sin 2\beta} \Rightarrow 1 = 2 \sin (90^\circ - \beta)$$

cos β = 1/2 ⇒ β = 60°, т.к. ∠MKN = 2β, то ∠MKN = 120°.

Ответ: 120°

Дано: Δ MKN - равнобедр.

MK = KN

KL, MD - биссектрисы.

MP = 2KL

Найти: ∠MKN - ?

38