

1 Задача

Дано:

 S - длина
дистанции a - ускорение
Антон v - его макс.
скорость t_A - время Ант. t_B - время Бор. $\Delta t = t_B - t_A$

Найти:

Решение: у Антона:

1) Разгон (первая треть пути):
$$v^2 = 2a \cdot \left(\frac{S}{3}\right) \Rightarrow a = \frac{3v^2}{2S}$$

$$t_1 = \frac{v}{a} = \frac{2S}{3v}$$

2) Равномерное движение (2-ая треть пути):
$$t_2 = \frac{S}{3v}$$
3) Замедление (3-ая треть пути):
$$t_3 = t_1 = \frac{2S}{3v}$$

$$t_A = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{2S}{3v} + \frac{S}{3v} + \frac{2S}{3v} = \frac{5S}{3v}$$

у Бориса:

1) Разгон (первая треть времени $\frac{t_B}{3}$):
$$v = a \cdot \left(\frac{t_B}{3}\right) \Rightarrow a = \frac{3v}{t_B}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{t_B}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3v}{t_B} \cdot \frac{t_B^2}{9} = \frac{vt_B}{6}$$

2) Равномерное движение (2-ая треть времени):
$$S_2 = v \cdot \frac{t_B}{3}$$
3) Замедление (3-ая треть времени): $S_3 = \frac{vt_B}{6}$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{vt_B}{6} + \frac{vt_B}{3} + \frac{vt_B}{6} = \frac{2vt_B}{3}$$

$$\Rightarrow t_B = \frac{3S}{2v}$$

$$t_A = \frac{5S}{3v} \quad t_B = \frac{3S}{2v}$$

$$\Delta t = t_A - t_B = \frac{10S}{6v} - \frac{9S}{6v} = \frac{S}{6v} \quad \frac{5S}{3v} \text{ и } \frac{3S}{2v}$$

Ответ: Борис обгонит Анто-
на на $\Delta t = \frac{S}{6v}$

$$\frac{10S}{6v} > \frac{9S}{6v}$$

 $t_A > t_B \Rightarrow$ Борис придет
раньше

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

2 Задача:

Дано:

v_0 - нач. скор

S - расстоя-
ние между
моряками

Решение:

Ур-ие движения
1 моряка:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_0 + v_0 t \cos \alpha = v_0 t \cos \alpha \\ y_1(t) = y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Ур-ие движения моряка 2:

$$\begin{cases} x_2(t) = x_0 + v_0 t \cos \beta = S - v_0 t \cos \beta \\ y_2(t) = v_0 t \sin \beta - \frac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Расстояние между моряками: $\Delta l^2(t) = \Delta x^2(t) + \Delta y^2(t)$, где

$$\Delta x = x_1 - x_2 = v_0 t \cos \alpha - (S - v_0 t \cos \beta)$$

$$\Delta y = y_1 - y_2 = v_0 t \sin \alpha - v_0 t \sin \beta \quad \text{При } \Delta l = l_{\min} \quad (\Delta l)' = 0$$

$$\Delta l = [v_0 t (\cos \alpha + \cos \beta) - S]^2 + [v_0 t (\sin \alpha - \sin \beta)]^2$$

Производная по времени:

$$\begin{aligned} (\Delta l)' &= 2 \cdot (v_0 t (\cos \alpha + \cos \beta) - S) \cdot v_0 (\cos \alpha + \cos \beta) + 2 v_0 t (\sin \alpha - \sin \beta) \cdot v_0 (\sin \alpha - \sin \beta) \\ (\Delta l)' &= 2 v_0 (v_0 t \cos \alpha + v_0 t \cos \beta - S) \cdot (\cos \alpha + \cos \beta) + 2 v_0^2 t (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \quad (\Delta l)' = 0 \end{aligned}$$

$$2 (v_0 t \cos \alpha + v_0 t \cos \beta - S) (\cos \alpha + \cos \beta) + 2 v_0 t (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 0$$

$$2 v_0 t \cos \alpha + 2 v_0 t \cos \beta - S + 2 v_0 t \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2}{\cos \alpha + \cos \beta} = 0 \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$v_0 t \left(\cos \alpha + \cos \beta + \frac{(\sin \alpha - \sin \beta)^2}{\cos \alpha + \cos \beta} \right) = S$$

$$t = \frac{S}{v_0} \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \tau, \text{ где } \tau - \text{ время}$$

после броска в которое
расстояние между моря-
ками минимально
 $\Delta l = l_{\min}$.

Найдем угол броска α и β

Для угла α и β подхо-

дит угол броска как из пер-

вой, так и из второй точки, так что угол можно определить

для обеих из точек

Так для точки 1 и угла α :

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - \frac{g}{2} t_n = 0, \text{ где } t_n - \text{время полета шара от точки}$$

$$t_n = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$x(t_n) = S = v_0 t_n \cos \alpha = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$D = 16v_0^8 - 4 \cdot 4v_0^4 (Sg)^2$$

$$\chi = \frac{4v_0^4 \pm \sqrt{16v_0^8 - 16v_0^4 (Sg)^2}}{8v_0^4}$$

$$\chi = \frac{v_0^4 \pm v_0^2 \sqrt{v_0^4 - (Sg)^2}}{2v_0^4} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{v_0^4 - (Sg)^2}}{2v_0^2}$$

$$\chi = 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2}$$

Найдем 2 значения χ , что соответствует двум углам α и β (случаи с отрицательным корнем $\left(\frac{Sg}{v_0^2} > 1\right)$ соответствует случаю когда скорости v_0 недостаточно чтобы добросить шар до точки S на расст. S)

$$\sin^2 \alpha = 1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2} \quad \sin \alpha = \pm \sqrt{1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2}}$$

Однако отриц. значение синуса следует откинуть т.к $\alpha \in (0; 90^\circ)$

$$\alpha = \arcsin \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2} \right)$$

$$\beta = \arcsin \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2} \right) \quad l_{\min} = \Delta l(\chi)$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} l_{\min} = (v_0 \chi (\cos \alpha + \cos \beta) - S)^2 + [v_0 \chi (\sin \alpha - \sin \beta)]^2 \\ \chi = \frac{S}{v_0} \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} \\ \alpha = \arcsin \left(1 + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2} \right)_{0,5} \\ \beta = \arcsin \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{Sg}{v_0^2}\right)^2} \right)_{0,5} \end{cases}$$

185

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

3 Задача:

Дано:

P - давление

T - темп.

найти:
 η - ?

Решение:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \cdot 100\%$$

где A - работа
газа за
цикл

Q_1 - кол-во теплоты
полученное газом

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{основание} \cdot \text{высота} \quad (\text{в треугольнике, который образован циклом})$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (T_3 - T_4) \cdot (p_2 - p_1)$$

используя уравнение состояния идеального
газа (Менделеева-Клапейрона) запишем:

$$pV = \nu RT$$

$$A = \frac{1}{2} \nu R (T_3 - T_4) \cdot (p_2 - p_1)$$

$$Q_1 = \nu C \Delta T$$

$$C = \frac{3}{2} R \quad (\text{молярная теплоемкость}) \quad \Delta T = T_2 - T_1$$

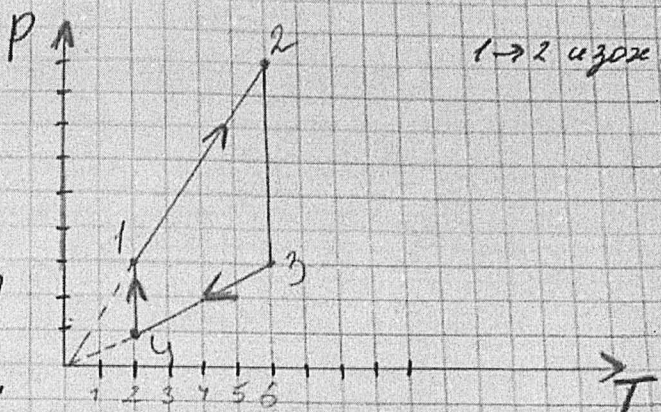
$$Q_1 = \nu C (T_2 - T_1) = \frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{2} \nu R (T_3 - T_4) (p_2 - p_1)}{\frac{3}{2} \nu R (T_2 - T_1)} \cdot 100\% \Rightarrow \eta = \frac{(T_3 - T_4) \cdot (p_2 - p_1)}{3 (T_2 - T_1)} \cdot 100\%$$

$$T_3 - T_4 = 100 \text{ K} \quad T_2 - T_1 = 400 \text{ K} \quad p_2 - p_1 = 1,5 \text{ атм.} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\eta = \frac{100 \cdot 1,5}{3 \cdot 400} \cdot 100\% = \frac{150}{1200} \cdot 100\% = 25\% \quad T_1 = 300 \text{ K.}$$

Ответ: $\eta = 25\%$. 155



Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

4 Задача.

Дано:

 φ_1 , φ_2 , φ_3 $F_1 = ?$

Решение:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3, \text{ где}$$

 $\vec{F}_2$ - сила, с которой 2-ой шарик
отталкивает 1-ый $\vec{F}_3$ - сила с которой 3-й
шарик отталкивает 1-ый

$$\varphi_1 = k \frac{q_1}{a}$$

$$\varphi_2 = k \frac{q_2}{a}$$

$$\varphi_3 = k \frac{q_3}{a}$$

$$\frac{k}{a} = \frac{\varphi_1}{q_1} = \text{const}$$

$$F_2 = k \cdot \frac{q_1 q_2}{a^2}$$

$$F_2 = k \cdot \frac{\varphi_1}{q_1} \cdot \frac{q_1}{a} \cdot \frac{q_2}{a} = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{k} \quad F_3 = \frac{\varphi_1 \varphi_3}{k}$$

Рассмотрим параллелограмм.

$$AB = F_3; AC = F_2 \quad DB = F_1 = ?$$

$$CH \perp AB \Rightarrow \angle \beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\angle \gamma = 90^\circ + \angle \beta = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

Теорема косинусов для $\angle \gamma$

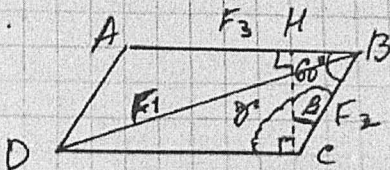
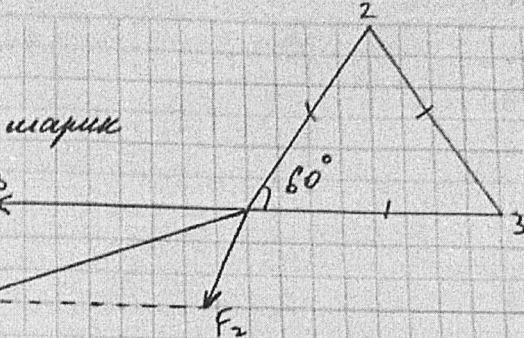
$$DB^2 = DC^2 + BC^2 - 2 DC \cdot BC \cdot \cos \gamma$$

$$F_1^2 = F_3^2 + F_2^2 - 2 F_2 F_3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$F_1 = \sqrt{\left(\frac{\varphi_1 \varphi_3}{k}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_1 \varphi_2}{k}\right)^2 + \frac{2}{k} \frac{\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_3}{k^2}} = \frac{\varphi_1}{k} \sqrt{\varphi_3^2 + \varphi_2^2 + \varphi_2 \varphi_3}$$

Ответ:

$$F_1 = k \sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_2 \varphi_3 + \varphi_3^2} \quad 205$$



5 Задача:

Дано:

Решение:

Уравнение для плотности влажного воздуха:

$$\rho_{\text{в}} = \frac{\rho_a M_a + \rho_v M_v}{RT}$$

$$\rho_a = \rho_a - \rho_v \quad (\text{напр. давл. сухого воздуха})$$

$$\rho_v = \varphi \cdot \rho_{\text{нас.}} \quad (\text{напр. давл. водяного пара})$$

$$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$$

$$V_{\text{н}} = 5000 \text{ м}^3$$

$$p_a = 110 \text{ кПа} = 110 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$T_a = 43^\circ \text{C}$$

$$\varphi = 10^\circ \text{C}$$

$$M_a = 0,029 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (\text{сухого воздуха})$$

$$M_v = 0,018 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \quad (\text{водяного пара})$$

$$P_{atm} = 100 \text{ кПа} = 100 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$t_0 = t_{out} \text{ в.}$$

$$\varphi_2 = 90\%$$

$$P_{natm} = 9000 \text{ Па}$$

$$g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\text{Найти:}$$

$$m_6 - ?$$

$$T = 0,3 + 273 = 316 \text{ К}$$

$$1) \text{ при } \varphi_1 = 100\%$$

$$P_0 = 0,1 \cdot 9000 \text{ Па} = 900 \text{ Па}$$

$$P_d = 100000 - 900 = 99100 \text{ Па}$$

$$P_{bn1} = \frac{99100 \cdot 0,029 + 900 \cdot 0,018}{8,31 \cdot 316} \approx 1,0995 \approx 1,1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\text{при } \varphi_2 = 90\%$$

$$P_2 = 0,9 \cdot 9000 = 8100 \text{ Па}$$

$$P_d = 10000 - 8100 \text{ Па} = 91900 \text{ Па}$$

$$P_{bn2} = \frac{91900 \cdot 0,029 + 8100 \cdot 0,018}{8,31 \cdot 316} = 1,07 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$F_{nog} = V \cdot (P_{bn} - P_2) g \quad \rho - \text{плотность газа (кг/м}^3)$$

$$P_2 = \frac{\rho g M_2}{RT} \quad M_2 = 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$P_2 = \frac{110.000 \text{ Па} \cdot 0,002 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}{8,31 \cdot 316} = 0,08 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\Delta F_{nog} = V \cdot (P_{bn2} - P_{bn1}) g$$

$$m_6 = \frac{\Delta F_{nog}}{g} = V (P_{bn1} - P_{bn2}) \quad \Delta P = (P_{bn1} - P_{bn2}) = 1,1 - 1,07 = 0,03 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\Delta F_{nog} = 5000 \cdot 0,03 \cdot 9,8 = 1506 \text{ Н}$$

$$m_6 = \frac{1506}{9,8} \approx 151 \text{ кг}$$

$$\text{Ответ: } m_6 = 151 \text{ кг.}$$

20