

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
24		Коржанев	М
Шифр			042032

$$1-f(a, b, c) = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

Для нахождения минимума воспользуемся методом наименьших квадратов. Рассмотрим выражение как функцию трех переменных и найдем её частные ~~вторые~~ производные по a, b, c , приравняв их к нулю:

$$1) \frac{\partial f}{\partial a} = 2(7+a-b) - 2(9+c-a) = 0$$

Упростим уравнения:
1) $2a - b - c = 2$

$$2) \frac{\partial f}{\partial b} = -2(7+a-b) + 2(2+b-c) = 0$$

$$2) -a + 2b - c = 5$$

$$3) \frac{\partial f}{\partial c} = -2(2+b-c) + 2(9+c-a) = 0$$

$$3) -a - b + 2c = -7$$

Это не годится.

Решу систему линейных уравнений. Сложу первое и второе уравнения:

$$(2a - b - c) + (-a + 2b - c) = 2 + 5 \Rightarrow a + b - 2c = 7.$$

Теперь сложу второе и третье уравнения:

$$(-a + 2b - c) + (-a - b + 2c) = 5 - 7 \Rightarrow -2a + b + c = -2.$$

Теперь есть система:

$$1) a + b - 2c = 7$$

$$2) -2a + b + c = -2.$$

1	2	3	4	5	Σ
5	7	7	2	3	24

М

Вычту второе уравнение из первого:

$$(a + b - 2c) - (-2a + b + c) = 7 - (-2) \Rightarrow 3a - 3c = 9 \Rightarrow a - c = 3.$$

Теперь подставлю $a = c + 3$ в первое уравнение системы:

$$(c + 3) + b - 2c = 7 \Rightarrow b - c + 3 = 7 \Rightarrow b = c + 4.$$

Теперь подставлю $a = c + 3$ и $b = c + 4$ в исходное выражение:

$$f(a, b, c) = (7 + (c + 3) - (c + 4))^2 + (2 + (c + 4) - c)^2 + (9 + c - (c + 3))^2$$

Упростим:

$$f(a, b, c) = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 108$$

Итак, минимальное значение выражения: 108.

Ответ: 108

Все правильно?

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№ 2- Используя теорему Виета:

Для многочлена $Q(x) = x^4 + x^5 - 4x^2 + 1$ корни x_1, x_2, x_3, x_4 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$1) x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{1}{1} = -1$$

$$2) x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -4$$

$$3) x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$$

$$4) x_1x_2x_3x_4 = 1$$

Выразим $P(x)$ через $Q(x)$:

Многочлен $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$ можно представить в виде:

$P(x) = (x^2 + ax + b)Q(x) + R(x)$, где $R(x)$ - остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$, степень которого меньше 4.

Найдем остаток $R(x)$:

Выполню деление $P(x)$ на $Q(x)$:

1) $x^6 = x^2 \cdot x^4$, поэтому первый член частного x^2 .

2) ~~Умножу~~ Умножу x^2 на $Q(x)$: $x^2 \cdot (x^4 + x^5 - 4x^2 + 1) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2$.

3) Вычту это из $P(x)$: $(x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506) - (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2) = -x + 506$

Таким образом, остаток $R(x) = -x + 506$

Подставлю корни $Q(x)$ в $P(x)$.

Поскольку $Q(x_i) = 0$ для всех корней x_i , то: $P(x_i) = R(x_i) = -x_i + 506$.

Следовательно, сумма $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$ равна:

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = \sum_{i=1}^4 (-x_i + 506) = -\sum_{i=1}^4 x_i + 4 \cdot 506.$$

Используя теорему Виета, $\sum_{i=1}^4 x_i = -1$, поэтому:

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = -(-1) + 4 \cdot 506 = 1 + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

3 - Упростим уравнение:

Перенесу все слагаемые, кроме косинуса, в правую часть:

$$\cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}\right) = x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11$$

Анализирую возможные значения:

Функция косинуса принимает значения в диапазоне $[-1; 1]$.

Следовательно, правая часть уравнения также должна находиться в этом диапазоне:

$$-1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \leq 1$$

Решу неравенство

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \leq 1. \text{ Упростим: } x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 10 \leq 0$$

Сделаю замену $y = \sqrt{x^2 + 1}$, тогда $y \geq 1$ и $x^2 = y^2 - 1$. Подставлю:

$$y^2 - 1 - 6y + 10 \leq 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 \leq 0 \Rightarrow (y - 3)^2 \leq 0$$

Единственное решение: $y = 3$. Тогда:

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 9 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Проверю:

Подставлю $x = 2\sqrt{2}$ в исходное уравнение:

$$(2\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 1} + 11 - \cos\left(\frac{(2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} - 4}{18}\right) = 0$$

$$\text{Упростим: } 8 - 6\sqrt{8+1} + 11 - \cos\left(\frac{8+4-4}{18}\right) = 8 - 18 + 11 - \cos\left(\frac{8}{18}\right) = 1 - \cos\left(\frac{4}{9}\right) \neq 0$$

Аналогично подставлю $x = -2\sqrt{2}$:

$$8 - 6\sqrt{8+1} + 11 - \cos\left(\frac{8-4-4}{18}\right) = 8 - 18 + 11 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

значит решение уравнения $x = -2\sqrt{2}$

ответ: $x = -2\sqrt{2}$.

X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

4 - Симметрия и предположение о равенстве:
Заметим, что условие симметрично относительно всех переменных x_i . Предположим, что все x_i равны между собой. Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = x$. Тогда условие принимает вид:
 $n x^{n-1} = x^n$

Отсюда получаем: $x^{n-1}(n-x) = 0$

Поскольку $x > 0$, то $x = n$. Таким образом, в случае равенства всех $x_i = n$, неравенство выполняется: $(n - n + 1)^n = 1^n = 1$

Общий случай:

Рассмотрим функцию: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1)$
Нам нужно доказать, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 1$ при условии:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

используя метод Лагранжа для нахождения экстремумов функции f при заданном ограничении.

Метод множителей Лагранжа:

Введем функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = (x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) - \lambda (x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} - x_1 x_2 \dots x_n)$$

Находим частные производные по x_i и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \prod_{j \neq i} (x_j - n + 1) - \lambda ((n-1)x_i^{n-2} - \prod_{j \neq i} x_j) = 0$$

показывает

Анализируя эти уравнения, можно показать, что единственной точкой экстремума является $x_i = n$ для всех i , что соответствует минимальному значению функции f , равному 1. Т.е. если!

Таким образом, при всех положительных x_i , удовлетворяющих условию задачи, выполняется неравенство:

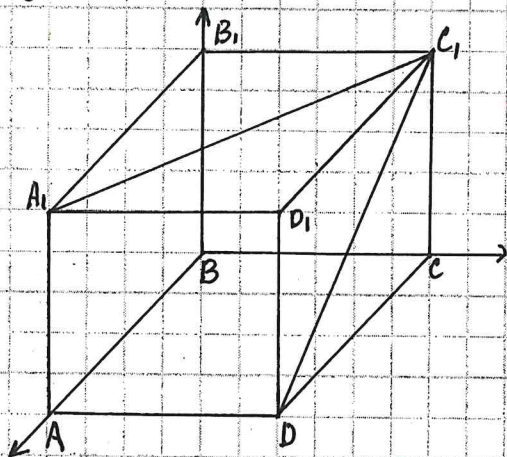
$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

что и требовалось доказать.

✓

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

5 -



Решение

1) Плоскость α :

- Плоскость α перпендикулярна прямой A_1C_1 .
- В кубе прямая A_1C_1 является диагональю верхней грани.
- Поскольку α перпендикулярна A_1C_1 , она должна быть параллельна другой диагонали верхней грани, например, B_1D_1 .

Дано:

$ABED A_1B_1C_1D_1$ - куб и
пл-ти α и β .
пл. $\alpha \perp A_1C_1$,
пл. $\beta \parallel CD_1$.

Найти:
 $\min \angle \alpha$ и β

2) Плоскость β

- Плоскость β параллельна прямой CD_1 .
- Прямая CD_1 - это ребро, соединяющее вершину C с вершиной D_1 .
- Плоскость β параллельна CD_1 , может быть выбрана так, чтобы она была параллельна одной из граней куба, например, грани CC_1 и D_1D .

3) Угол между плоскостями α и β :

- Плоскость α параллельна диагонали B_1D_1 , а плоскость β параллельна ребру CD_1 .
- Угол между плоскостями α и β будет равен углу между их нормальными.
- Нормаль к плоскости α направлена вдоль A_1C_1 , а нормаль к плоскости β направлена перпендикулярно CD_1 .
- В кубе угол между A_1C_1 и CD_1 составляет 45° градусов.
- Таким образом, наименьший возможный угол между плоскостями α и β равен 45° .

Вопрос: CD_1 не нормальна.

CD_1 не нормальна

ответ: 45°