

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
17		Евсеев	Евсеев
Шифр			048241

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline 1 & 7 & 4 & 0 & 5 & \\ \hline & & & & & 17 \end{array}$$

- 1) $(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$
минимальное выражение положительного числа „0“, тогда пусть
 $9+c-a=0$
 $a=9$, подставим $(7+a-b)^2 + (2+b-a+9)^2 = (7+a-b)^2 + (11+b-a)^2$ предположим
 $11+b-a=0$
 $b=a-11$, тогда $(7+a-a+11)^2 = 18^2 = 324$ Ответ: 324

- 2) $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$ $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$ имеет корни x_1, x_2, x_3, x_4
 $P(x) = x^2(x^4 + x^3 - 4x + 1) - x + 506$
 $P(x_1) = x_1^2 \cdot Q(x_1) - x_1 + 506$ $Q(x_1) = 0$ тогда $P(x_1) = -x_1 + 506$ аналогично:
 $P(x_2) = -x_2 + 506$ $P(x_3) = -x_3 + 506$ $P(x_4) = -x_4 + 506$
 $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 506 \cdot 4 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$ по т. Виета
тогда $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 2025$

3) $x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1}x - 4}{18} = 0$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1}x - 4}{18}$$

Рассм. левую часть: $f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \sqrt{x^2+1}^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 10$

Введем замену $\sqrt{x^2+1} = t > 0$ $f(t) = t^2 - 6t + 10$

Найдем наименьшее значение $f(t)$ — вершина параболы

$$t = 3 \quad f(3) = 9 - 18 + 10 = 1$$

Значит $x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$ — наименьшее значение $= 1$

Правая часть $-1 \leq \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1}x - 4}{18} \leq 1$, то наибольшее $= 1$

тогда если уравнение имеет решение, то 2 части должны равняться единице

$$\sqrt{x^2+1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x = \sqrt{2} \quad \cos \frac{2+2-4}{18} = \cos 0 = 1$$

$$x = -\sqrt{2} \quad \cos \frac{2-2-4}{18} \neq 1$$

Ответ: $x = \sqrt{2}$

по условию выбран, это решение?

- 4) $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ — дано $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$

доказать $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

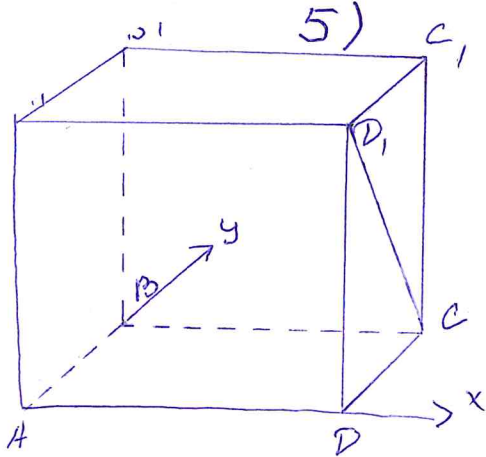
$n \leq 3$ т.к. если $n \geq 3$ и более, то сумма чисел в степени больше

2, будет больше их произведение

$n \geq 1$ т.к. если $n \geq 1$, то $x_1^{n-1} \geq 1 \Rightarrow n \neq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$

если $n \leq 1$ то $x_1^{n-1} \geq \frac{1}{x_1^n} \geq \frac{1}{x_1^n} + \frac{1}{x_2^n} + \dots + \frac{1}{x_n^n} \neq x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$

$1 < n < 3$ n — целое число



Пусть $\vec{n} \perp d \quad \vec{n}_1 \perp B_1 C_1 \Leftrightarrow$

$$\cos(\angle B_1) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$$

В качестве $\vec{n}$ можно принять $\vec{AC}_1 \Leftrightarrow \vec{AC}_1 \Leftrightarrow (1; 1; 0)$

Пусть $\vec{n}$ — ин. координ. (p, q, r)

т.к. $CD_1 \parallel B_1 C_1$, то $\vec{n}_1 \perp \vec{CD}_1$

$$\vec{CD}_1 \Leftrightarrow D_1 - C \Leftrightarrow (1, 0, 1) - (1, 1, 0) \Leftrightarrow (0; -1; 1)$$

$$\vec{n}_1 \perp \vec{CD}_1, \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{CD}_1 = 0 \Rightarrow -q + r = 0 \quad r = q$$

т.е. $\vec{n}_1$ имеет вид $(p; q; q)$

Пусть $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \varphi \quad \cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{p+q}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+2q^2}}$

Б.О.О. ? можно считать, что $q=1$

Требуется найти $\min |\cos \varphi| = \min \frac{|p+1|}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+2}} \quad a > 0$?

т.е. требуется найти наименьшее $a, a > 0$ при котором уравнение

$$\frac{|p+1|}{\sqrt{2} \sqrt{p^2+2}} = a \quad \text{имеет решение } p \quad |p+1|^2 \geq a^2 (p^2+2)$$

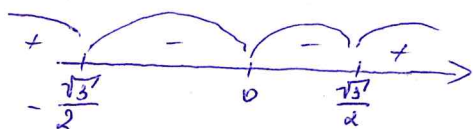
$$2a^2 p^2 + 4a^2 + p^2 + 2p + 1$$

$$p^2(2a^2 - 1) - 2p + 4a^2 - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (2a^2 - 1)(4a^2 - 1)$$

$$8a^4 - 6a^2 + 1 = 0$$

$$2a^2(4a^2 - 3) \geq 0$$



$a > 0!$

$$\min |\cos \varphi| = a \min \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6}$$