

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
30	20.03.25	Тещинский	
Шифр			918426

1/2/3/4/5
2/7/7/7/7

Задача 11

Заметим, что выражение можно преобразовать в другое следующим способом:

$$\begin{aligned} (10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 &= (10+a)^2 - 2b(10+a) + b^2 + (2+b)^2 + c^2 - 2c(2+b) + \\ &+ (3+c)^2 - 2a(3+c) + a^2 = 100 + 20a + a^2 - 20b - 2ab + b^2 + 4 + 4b + b^2 + c^2 - 4c - 2bc + \\ &+ 9 + c^2 + 6c - 6a - 2ac + a^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (a-b)^2 + 113 + 14a - 16b + 2c \end{aligned}$$

Рассмотрим далее несколько случаев:

1) $a=b=c=x$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + x^2 + 113 + 14x + 2x - 16x = 0 \quad 113$$

2) $a-b=x, c=x+y, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y^2 + y^2 + 0^2 + 113 + 14x - 16x + 2x + 2y = 2y^2 + 2y + 113$$

Сравним данное выражение с найденным в п.1:

$$2y^2 + 2y + 113 \leq 113$$

$$2y^2 + 2y \leq 0$$

$$2y(y+1) \leq 0$$

$\Rightarrow$ При $y \in [0, -1]$, выражение меньше или равно 113.

$\Rightarrow$ Самое минимальное значение при $y = -0.5$

$$\Rightarrow 0.5^2 + 0.5^2 + 0^2 + 113 + 2 \cdot (-0.5) = 113 + 0.5 - 1 = 112.5$$

3) $a=c=x, b=x+y, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y^2 + y^2 + 0 + 113 + 14x - 16x - 16y + 2x = 2y^2 - 16y + 113 = 2y(y-8) + 113$$

Сравним со 113: $\Rightarrow$ выражение ≤ 113 , когда

$y \in [0, 8] \Rightarrow$ минимальное значение при $y=4$:

$$\Rightarrow 2 \cdot 4(4-8) + 113 = 113 - 32 = 81$$

4) $b=c=x, a=x+y, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y^2 + y^2 + 113 + 14x + 14y - 16x + 2x = 2y^2 + 14y + 113$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 918426

Итого выражали с $113 = 2y(y+7) + 113 * 113$

$\Rightarrow$ выражение ≤ 113 ког $y \in [-7; 0] \Rightarrow$ миним. значение при

$$y = -3,5: 2 \cdot 3,5^2 - 14 \cdot 3,5 + 113 = 7 \cdot 3,5 - 49 + 113 = 113 - \frac{49}{2} = 113 - 24,5$$

, что больше, чем 63 в предыдущем пункте.

5) Последнее условие:

$$a \neq b \neq c: a = x + a_1, b = x + b_1, c = x + c_1, c_1 \neq b_1 \neq a_1$$

$$\Rightarrow (a_1 - b_1)^2 + (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - c_1)^2 \leq 113 + 14x + 14a_1 + 2c_1 + 2b_1 - 16x - 16b_1 =$$

$$= (a_1 - b_1)^2 + (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - c_1)^2 \leq 113 + 14a_1 - 16b_1 + 2c_1.$$

Заметим, что мы получили абсолютную копию искомого выражения, где $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$

Имеем три неравенства. 4 случая можно перебрать в этих выражениях и получить такое же неравенство, если не все из $a \neq b, \neq c,$

$\Rightarrow$ Мы получаем наше выражение.

~~Следовательно можно сказать, что x такое, что $a, b, c \geq 0$~~

~~$$\Rightarrow (a_1 - b_1)^2 + (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - c_1)^2 \leq 113 + 14x$$~~

~~Возвращаемся к исходному выражению~~

Следовательно мы будем записывать $a_1, b_1, c_1 \Rightarrow$

Пусть $b_1 = x, a_1 = x + a, c_1 = x + c$

$$\Rightarrow \text{выражение} = a^2 + c^2 + 113 + 14a + 2c = (a+1)^2 + (c+1)^2 + 113 - 50$$

$\Rightarrow$ можно подобрать такие c_1 и a_1 , что квадраты равны 0

$\Rightarrow$ минимальное значение нашего выражения равно 63

$\Rightarrow$ Самое меньшее значение искомого выражения получим в п.4 и

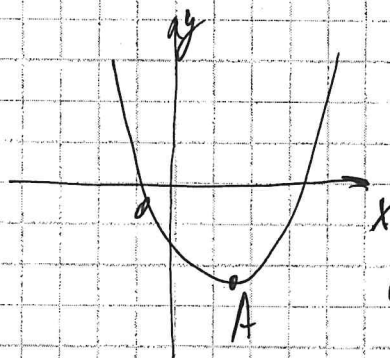
оно равно 63 $\Rightarrow$ это и будет $\Rightarrow$ ответ: 63

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 12

$$f(x) = ax^2 + ax + b$$

Заметим, что если изображены график данной функции, то это параболка ветвями вверх. (Пускай наоборот она выглядела так).



⇒ Тогда для всех $x \in \mathbb{R}$ (то есть для любых точек по оси Ox , координата y будет больше или равна $-\frac{9}{10}$).

Это выражение означает то, что самая низкая точка параболы $\geq -\frac{9}{10}$ по оси Ox .

Самая низкая точка параболы ветвями вверх это ее вершина (точка A).

⇒ Координата y вершины $\geq -\frac{9}{10}$.

Сравним

$$-\frac{9}{10} \text{ и } -\frac{1}{4} :$$

$$-\frac{9}{10} * -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{36}{40} * -\frac{10}{40}$$

75

Мы видим, что точка $-\frac{10}{40}$ расположена выше на оси Ox чем точка $-\frac{36}{40}$.

Не забываем, что у функции $x^2 + ax + b$ — целые коэффициенты.

$$x_0 = -\frac{a}{2} \Rightarrow y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} + b = b - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{9}{10}$$

В нашем же случае, когда $f(1) = -0,25$, все аналогично, только теперь $b - \frac{a^2}{4} \geq -0,25 = -\frac{10}{40}$.

Заметим, что $\frac{a^2}{4}$ — неотрицательное значение.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Т.к. b и a принимают целые значения, то

$\frac{a^2}{4}$ имеет целое значение, а также значение после запятой, причем

значение после запятой уже свидетельствует, что значение $\frac{a^2}{4}$ не может

быть 0, 25, 50, 75. $(\frac{a^2}{4} = \frac{a^2 \cdot 25}{100} \Rightarrow a^2 \cdot 0,25, \text{ то есть } 0,25 \text{ берется}$

a^2 раз $\Rightarrow$ получаются следующие значения)

$\Rightarrow$ Теперь, зная это и то, что $b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{9}{10}$ и то, что $b - \frac{a^2}{4}$ принимает значения на 0,25/50/75 (так как значение b имеет только на целую часть)

можно сказать, что $b - \frac{a^2}{4} \geq -0,75 > -0,9$

Также можно сказать, что $b - \frac{a^2}{4} \geq -0,5 > -0,9$

$\Rightarrow$ Тогда эти 2 случая не удовлетворяют условию

$\Rightarrow$ Но не +0,9 могут быть числа -0,75, -0,5, -0,25

нет нет удовлетворяет

~~Выводом является, что~~ $b - \frac{a^2}{4}$

Заметим также, что $\frac{a^2}{4}$ является неотрицательным $\Rightarrow$ если мы из координаты b по оси x будем вычитать $\frac{a^2}{4}$, то получимся будет только уменьшаться

$\Rightarrow$ Предположим допустить, что не существует таких чисел a и b , тогда $b - \frac{a^2}{4}$ равно -0,75 или -0,50

Т.к. b — целое число, то числа 75 и 50 после запятой должны быть нулевыми

$\frac{a^2}{4} \Rightarrow$ Т.к. b или можем подставить любое из наших значений, или

можно снова найти такое число a , что $\frac{a^2}{4}$ равняется на 0,5 или 0,75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\Rightarrow 1) \frac{a^2}{4} = x + 0,75$$

$$\Rightarrow a^2 = 4x + 3. \quad (x - \text{целое число}, x \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow a^2 - 3 = 4x \quad \Rightarrow a^2 \equiv 3$$

$$(a \not\equiv 0) (a \not\equiv 3) \quad \Rightarrow a \text{ должно быть кратно 4.}$$

$$\Rightarrow \text{Представим } a \text{ как } 4n+1, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a^2 = (4n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow \text{Не существует такого } a \Rightarrow 1 \text{ вариант отпал.}$$

$$\Rightarrow 2) \frac{a^2}{4} = x + 0,5 \Rightarrow a^2 = 4x + 2. \quad a^2 - 2 = 4x \Rightarrow a^2 \equiv 2$$

$$\text{Проверим, что } a \text{ - четное} \Rightarrow \text{Представим его в виде } 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{то } a^2 = 4n^2 \Rightarrow a^2 \equiv 0 \pmod{4} \Rightarrow a \equiv 0$$

$$\Rightarrow \text{был 1 вариант отпал}$$

$$\Rightarrow \text{Остаток вариантов } -0,25 \text{ и более, что порождает условие } f(x) \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{Их проверка не обязательна.}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 3

$$a_1 = 25, \dots, a_{2025} = 625$$

$$\Rightarrow a_{2025} = a_1 + k \cdot 2024 \quad (k - \text{камень по коэффициенту прогрессии})$$

$$\Rightarrow k = \frac{a_{2025} - a_1}{2024} = \frac{625 - 25}{2024} = \frac{600}{2024}$$

Заметим, что прогрессию можно преобразовать следующим способом:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{a_{2024} - a_{2025}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Заметим, что каждый член суммы является предельно равно по k

$$\Rightarrow a_1 - a_2 = a_2 - a_3 = \dots = a_{2024} - a_{2025} = a_n - (a_n + k) = -k$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{a_1 - a_2} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{a_2 - a_3} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{a_{2024} - a_{2025}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{-k} + \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3}}{-k} + \dots + \frac{\sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{-k} =$$

$\Rightarrow$ Приведем все к общему знаменателю $(-k)$ получаем, что если при противоположных по знаку числах: $\sqrt{a_1}$ и $-\sqrt{a_2}$; $\sqrt{a_2}$ и $-\sqrt{a_3}$ $\Rightarrow$

Можно их упростить (они сократятся):

$$\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_2} - \sqrt{a_3} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_4} + \dots + \sqrt{a_{2024}} - \sqrt{a_{2025}}}{-k} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{2025}}}{-k}$$

Необходимо сказать, что все числа от a_1 до a_{2025} являются зрелыми $\Rightarrow$ являются также и не зрелыми $\Rightarrow$ мы можем дополнительно не $\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}$

$\Rightarrow$ Подставим известные величины в полученную формулу, получим, что

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_{2025}}}{-k} = \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{k} = \frac{(25 - 625) \cdot 2024}{600} =$$

$$= \frac{28}{600} \cdot 2024 = \frac{1024}{30} = \frac{1024}{15}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача №4:

Пусть x_n - корни $Q(x) \Rightarrow$

$$P(x) = x_n^6 + x_n^5 - 4x_n^4 + x_n^2 - x_n + 50$$

$$\text{замечим, что } P(x) = x_n^2(x_n^4 + x_n^3 - 4x_n^2 + 1) - x_n + 50$$

$$\text{но } Q(x_n) = 0 = x_n^4 + x_n^3 - 4x_n^2 + 1 \Rightarrow P(x_n) = 50 - x_n$$

$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 50 \cdot 4 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 200 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4$$

Заметим, что если у нас есть многочлен вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,
то сумма корней $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -\frac{b}{a}$ $\Rightarrow$

сумма корней

$$\text{Тогда в нашем случае } -\frac{b}{a} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 200 - (-1) = 201$$

70



Заметим, что ТМ точка L лежит на
биссектрисе угла NMK , но
расстояние от этой точки до сторон
это две дуга окружности (или две отрезка).

Найдём угол: $\angle MBL = 80^\circ = \angle MBL$

$\angle AML = \angle BML \Rightarrow \triangle AML = \triangle BML$ по
гипотенузе (общая ML) и прилежащему
к ней углу $\Rightarrow \angle A = \angle B$ как
соответственные стороны $\Rightarrow$

Кронометром $BM = AM$ как соотв. измер. #

Получим, что $L_{MNK} = S_{MN} + P_{MK} =$

$$= \frac{1}{2} h k + \frac{1}{2} h y = \frac{1}{2} h (x+y) = 11. \quad (MN=x; MK=y)$$

Теперь заметим, что $MNLK$ - вписанный в окружность четырехугольник $\Rightarrow \angle NMK \neq \angle NLK = 110^\circ \Rightarrow \angle NLK = 120^\circ = \alpha + \beta$

Тогда заметим, что если $\angle NLK$ повернуть на θ по часовой стрелке, то он совпадет с $\angle ALB$. (т.к. $\angle AML = \angle BML = 30^\circ$, но $\angle ALM = \angle BLM = \frac{180 - 60}{2} = 60^\circ$;
 $\Rightarrow \angle ALB = 120^\circ = \angle NLK$.)



$$\Rightarrow S_{MNEK} = S_{MNL} + S_{MOL} + S_{BOL} = S_{MANL} + S_{MOBL} + S_{ANL} = S_{MALB} = 81$$

Теперь, т.к. мы знаем, что $S_{\text{милк}} = S_{\text{малб}}$, то можно вычислить $S_{\text{прав}}$

Заметим, что $MALB$ состоит из 2 географических регионов: ΔMBL и ΔMAL

$$\Rightarrow \frac{MB}{LB} = \tan 60^\circ \quad (\Delta MBL = \Delta MBL) \Rightarrow MB = LB \cdot \tan 60^\circ = R \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AKB} = \frac{1}{2} KB \cdot BM + \frac{1}{2} AK \cdot AM = \left[\text{Так } \triangle MAK = \triangle MBL, \text{ то их } S \text{ равны} \right] =$$

$$= \frac{MB \cdot BL}{2} \cdot 2 = MB \cdot BL = l \cdot \sqrt{3} \cdot l = l^2 \sqrt{3} = 81$$

$$\Rightarrow l^2 \sqrt{3} = 81 \Rightarrow l = \sqrt{\frac{81}{\sqrt{3}}} = \frac{9}{\sqrt[4]{3}}$$

$$\left\{ \frac{(x+y)h}{2} = 81 \right. \Rightarrow \frac{(x+y)}{2} \cdot \frac{9}{\sqrt[4]{3}} = 81 \Rightarrow x+y = \frac{81 \cdot 2 \cdot \sqrt[4]{3}}{9} = 18 \sqrt[4]{3}$$

Так ранее $\wedge MN = x$ и $MK = y \Rightarrow$ сумма длин MN и $MK = x+y =$
или наоборот. $= 18 \cdot \sqrt[4]{3}$ ✓