

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
13	21.03	Коробков Е.Е.	И

w/2

$$\begin{cases} x, y \in (0, 0,5) \\ y^3 - x^3 > y - x \end{cases}$$

доказ-ть: $y^3 - x^3 > y - x$

1) $y^3 - x^3 > y - x$

$$(y-x)/(y+x) > (y-x)$$

$$(y-x)/(y+x-1) > 0$$

заметим, что $x+y-1 < 0$ м.к. $x, y \in (0, 0,5)$

$$\begin{cases} x+y-1 < 0 \\ (y-x)/(x+y-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y-x < 0 \\ x > y \end{cases}$$

2) $y^3 - x^3 > y - x$

$$(y-x)/(y^2+xy+x^2) > (y-x)$$

$$(y-x)/(y^2+xy+x^2-1) > 0$$

$$(y-x)/(y^2+2xy+x^2-xy-1) > 0$$

$$(y-x)/((x+y)^2-xy-1) > 0$$

$$\begin{cases} y-x < 0 \\ (y-x)/((x+y)^2-xy-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x+y)^2-xy-1 < 0$$

заметим, что $(x+y)^2 < 0,5^2 = 0,25$, м.к. $x, y \in (0, 0,5)$ и $xy < 0,5^2 = 0,25$, м.к. $x, y \in (0, 0,5)$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - xy - 1 < 0 \quad \text{— верно, м.к. } \begin{cases} (x+y)^2 < 0,25 \\ + xy < 0,25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x+y)^2 - xy < 0 \Rightarrow (x+y)^2 - xy - 1 < 0$$

н. м. г.

$$\text{УН} \quad \cos(2\alpha) + \cos^{2023}(2\alpha) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2\alpha) = \sin(\alpha) + \sin^{2023}(\alpha) + 2024 \cdot \sin^{2025}(\alpha)$$

Введем функцию $f(t) = t + t^{2023} + 2024 \cdot t^{2025}$ и заметим, что левая часть уравнения равна $f(\cos(2\alpha))$ и правая часть уравнения равна $f(\sin(\alpha))$.

$$\Rightarrow f(\cos(2\alpha)) = f(\sin(\alpha))$$

Заметим также, что функция f — возрастающая, $f(t) = t + t^{2023} + 2024 \cdot t^{2025}$, где t, t^{2023} и $2024 \cdot t^{2025}$ — возрастающие функции $\Rightarrow$ ~~функция~~ возраст. функции = возраст. функции

т.к. $f(t)$ — возраст. и $f(\cos(2\alpha)) = f(\sin(\alpha))$, то $\sin(\alpha) = \cos(2\alpha)$

$$\sin(\alpha) = \cos(2\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

$$2\sin^2(\alpha) + 2\sin(\alpha) - \sin(\alpha) - 1 = 0$$

$$2\sin(\alpha)(\sin(\alpha) + 1) - (\sin(\alpha) + 1) = 0$$

$$(\sin(\alpha) + 1)(2\sin(\alpha) - 1) = 0$$

$$\sin(\alpha) = -1$$

или

$$2\sin(\alpha) = 1$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

Ответ $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

У1 представим это отношение в виде $\frac{abcd}{a+b+c+d}$, где a, b, c, d — цифры числа

пусть $\frac{abcd}{a+b+c+d} = n$, т.к. n наименьшее, то $a+b+c+d$ — наиб.

заметим, что наиб. $a+b+c+d = 9 \cdot 4 = 36$ (a, b, c, d — цифры)

даже найдем наиб. n , умевшая сумму цифр на 1:

$$1) a=b=c=d=9 \Rightarrow 9999 - 9999 = 0$$

т.к. $36:4$ и 4 — чётное, то $9999:4$ не делится на 4 (последние 2 цифры $99/4$)

$\Rightarrow$ учитывать сумму на 1.

2) $a+b+c+d=35$: $abcd = 9998$ или 9989 или 9899 или 8999
т.к. $35:5$, то $abcd:5$ однако это не так, т.к. $abcd$ не заканчивается на цифру 0 или 5 $\Rightarrow$ не подходит.

3) $a+b+c+d=34$: $abcd = 9988$ или 9899 или 8999 или 8989 или 8899 или 8998 или 8988 или 8898 или 8889 или 8888
 $34:2 \Rightarrow$ числа $9999, 9889, 8899, 8889$ не подходят, т.к. они $\neq 2$
проверим числа $9988, 9898, 8998$:

$$\begin{array}{r} 9988 \quad 34 \\ 68 \quad 293 \\ 318 \\ 306 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9898 \quad 34 \\ 68 \quad 291 \\ 809 \\ 806 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8998 \quad 34 \\ 68 \quad 264 \\ 219 \\ 204 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ 102 \\ 26 \end{array} \quad \text{— не подходит}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 34 \\ 4 \end{array} \quad \text{— не подг.}$$

$$\begin{array}{r} 158 \\ 136 \\ 22 \end{array} \quad \text{— не подг.}$$

4) $a+b+c+d=33$: $abcd = 9888$ или 8988 или 8898 или 8889 или 9978 или 9887 или 8997 или 8897 или 8887 или 8888 или 8889 или 8899 или 8999 или 9999 и т.д. и т.д.
т.к. $33:11$ то $abcd:11 \Rightarrow a+b+c+d:11$

$$\begin{array}{l} 5) 9+9-9-8 = -1 \neq 11 \\ 6) 9+8-9-7 = 1 \neq 11 \\ 7) 9+9-8-7 = 3 \neq 11 \\ 8) 9+9-9-8 = 3 \neq 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1) 9+8-8-8 = 1 \neq 11 \quad (9888) \\ 2) 8+8-9-8 = -1 \neq 11 \quad (8988) \\ 3) 8+9-8+8 = 1 \neq 11 \quad (8898) \\ 4) 8+8-9-8 = -1 \neq 11 \quad (8889) \end{array}$$

$\Rightarrow$ не подходит

5) $a+b+c+d=32$: $abcd = 8888$: $8888:32 = 277.75$ — не чётное $\Rightarrow$ не подходит.

6) $a+b+c+d=31$: $abcd$: 9988 и т.д.; 9979 и т.д.; 9995 и т.д.; 9986 и т.д.

$32:8 \Rightarrow abcd:8 \Rightarrow$ число $abcd:8$, возможные числа не подходят, т.к. $\neq 2 \Rightarrow$
1) $988:8 = 123.5$
2) $988:8 = 123.5$

3	$878:8=109\frac{5}{8}$	- не подходит (не целое)
4	$898:8=112,25$	- не подходит (не целое)
5	$986:8=123,25$	- не подходит (не целое)
6	$968:8=121$	- подходит
7	$698:8=87,25$	- не подходит (не целое)
8	$896:8=112$	- подходит

$\Rightarrow$ подходит $\overline{abcd} = 9968$ и 9896

1 $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} = \frac{9968}{32} = \frac{1241}{4}$ не целое $\Rightarrow$ не год.

2 $\frac{9896}{32} = \frac{1237}{4}$ не целое $\Rightarrow$ не год.

6 $a+b+c+d=31$ $\overline{abcd} = 9994$ и т.д., 8887 и т.д., 9886 и т.д., 9976 и т.д.; 9985 и т.д.

$\begin{array}{r} 9994 \\ 93 \\ \hline 69 \\ 62 \\ \hline 74 \\ 62 \\ \hline 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ 322 \\ \hline 32 \\ \hline 29 - \text{на н.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 9949 \\ 93 \\ \hline 64 \\ 62 \\ \hline 29 - \text{на н.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 9499 \\ 93 \\ \hline 199 \\ 186 \\ \hline 13 - \text{на н.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 4999 \\ 31 \\ \hline 161 \\ 189 \\ 186 \\ \hline 39 \\ 31 \\ \hline 8 - \text{на н.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 8887 \\ 62 \\ \hline 268 \\ 248 \\ \hline 207 \\ 186 \\ \hline 21 - \text{на н.} \end{array}$
--	---	--	--	---	---

и т.д. проверяя все числа ни одно не подходит.

7 $a+b+c+d=30$: $\overline{abcd} = 9993$ и т.д., 8886 и т.д., 9885 и т.д., 9975 и т.д.; и т.д.
ни одно из возможных $\overline{abcd}$: 10. $\Rightarrow$ не год.

8 $a+b+c+d=29$: $\overline{abcd}$: 9992 и т.д.; 8887 и т.д.; 9884 и т.д., 9983 и т.д.; и т.д.

также далее проверяя эти числа ни одно не подходит.

9 $a+b+c+d=28$ $\overline{abcd} =$

и т.д. проверяя все числа получаем единственное подходящее $\overline{abcd} = 9796$

проверка $\frac{9796}{31} = 316 \Rightarrow$ - цел. отношение

Ответ: 316 - отношение, 9796 - число.

м.к. $MP_2 = P_2 N = N/Q_2 = Q_2 R$, $MP_2 Q_2$ — ср. мул. $\Rightarrow P_2 Q_2 = \frac{1}{2} MK$

$$d^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \quad (a - \text{сторона } \triangle MNK \text{ и } \Delta \text{ прав.})$$

$$3. \quad p_2 q_2 = \frac{1}{2} a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. заметим также, что $\text{наб. длина} = P_1 K$, где $OK = P_1 O = \frac{1}{2} a = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5 $\triangle MPO$: $m.k.$ $O_1P = MO = \frac{1}{2}a$ mo $\triangle$ равнос. $\Rightarrow \angle OMP_1 = \angle MPO = 50^\circ$
 $\Rightarrow \angle MOP_1 = 60^\circ$
 $\Rightarrow \angle P_1OK = 180^\circ - \angle MOP_1 = 120^\circ$

6. $\Delta P_1 OK$: law of cos.:
 $P_1 K^2 = P_1 O^2 + OK^2 - 2 \cdot OK \cdot P_1 O \cos 120^\circ$
 $P_1 K^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $P_1 K = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow \text{given } P_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{const}$$

Answer: $\frac{1}{\sqrt{3}}$



W3 $P(17) = P(101) = 2024$

m. k. $17^3 = 4913 > 2024$ mb $n \neq 3 \Rightarrow n \leq 2 \Rightarrow P(17) = a_2 \cdot 17^2 + a_1 \cdot 17 + a_0$
 m. k. $P(17) = a_2 \cdot 17^2 + a_1 \cdot 17 + a_0$

m. k. $101^2 = 10201 > 2024$ mb $n \neq 2 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow P(101) = a_1 \cdot 101 + a_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot 17 + a_0 = 2024 \\ a_1 \cdot 101 + a_0 = 2024 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 2024 - 17a_1 \\ 101a_1 + 2024 - 17a_1 = 2024 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(17) = a_0 = 2024$

other?