

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
16	Коржак	Коржак	И
Шифр			152003

N 1

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline 5 & 5 & 3 & 0 & 3 & 16 \\ \hline \end{array}$$

П.к. все слагаемые - квадраты, то каждое из них больше нуля или равно нулю.

Значение выражения будет минимальным, когда каждое слагаемое будет минимальным. Попробуем взять все слаг., равные нулю:

$$\begin{cases} 7+a-b=0 \\ 2+b-c=0 \\ 9+c-a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b-7 \\ c=b+2 \\ 9+b+2-b+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b-7 \\ c=b+2 \\ 18=0 \end{cases}$$

(такого быть не может $\Rightarrow$ с-ма не имеет решений, значит все 3 слаг. не могут одновременно обращаться в ноль)

Рассмотрим ф-ию 3-х переменных a, b, c и обозначим её $S(a, b, c)$

$$\begin{aligned} 1) S'(a) &= 2(7+a-b) \cdot (7+a-b)' + 0 + 2(9+c-a) \cdot (9+c-a)' = \\ &= 2(7+a-b) \cdot 1 + 0 + 2(9+c-a) \cdot (-1) = 14 + 2a - 2b - 18 - 2c + 2a = \\ &= 4a - 2b - 2c - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) S'(b) &= 2(7+a-b) \cdot (-1) + 2(2+b-c) \cdot 1 + 0 = \\ &= -14 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c = -2a + 4b - 2c - 10 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) S'(c) &= 2(9+c-a) \cdot 1 + 2(2+b-c) \cdot (-1) + 0 = \\ &= 18 + 2c - 2a - 4 - 2b + 2c = -2a - 2b + 4c + 14 = 0 \end{aligned}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\begin{cases} 4a - 2b - 2c - 4 = 0 & (I) \\ -2a + 4b - 2c - 10 = 0 & (II) \\ -2a - 2b + 4c + 14 = 0 & (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6b = 6a + 6 \\ 6b = 6c + 24 \end{cases} \quad \begin{cases} b = a + 1 \\ b = c + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b - 1 \\ c = b - 4 \\ b - \text{любое} \end{cases}$$

при $b = 0$: $a = -1$; $c = -4$

Подставим в выражение:

$$(7 - 1 - 0)^2 + (2 + 0 + 4)^2 + (9 - 4 + 1)^2 = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108$$

верно

Ответ: 108

N2

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = ? \quad x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{корни } Q(x)$$

$$x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506 = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506$$

$$P(x) = Q(x) \cdot x^2 - x + 506 \quad Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 + 506 - x_2 + 506 - x_3 + 506 - x_4 + 506 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = \\ &= (x^2 - x \cdot x_2 - x \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2)(x^2 - x \cdot x_4 - x \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4) = \\ &= x^4 - \underline{x^3 \cdot x_4} - \underline{x^3 \cdot x_3} + \underline{x^2 \cdot x_3 \cdot x_4} - \underline{x^3 \cdot x_2} + \underline{x^2 \cdot x_2 \cdot x_4} + \underline{x^2 \cdot x_2 \cdot x_3} - \\ &- \underline{x \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} - \underline{x^3 \cdot x_1} + \underline{x^2 \cdot x_1 \cdot x_4} + \underline{x^2 \cdot x_1 \cdot x_3} + \underline{x \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4} + \\ &+ \underline{x^2 \cdot x_1 \cdot x_2} - \underline{x \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4} - \underline{x \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \end{aligned}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$= x^4 - x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x^2(x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4) - x(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Многочлены равны, когда у них коэф-ты при одинаковых степенях равны:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

N3

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-1 \leq x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 1$$

$$f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11$$

Введём новую переменную:

$$\sqrt{x^2 + 1} = t \quad x^2 + 1 = t^2 \quad x^2 = t^2 - 1$$

$$f(t) = t^2 - 1 - 6t + 11$$

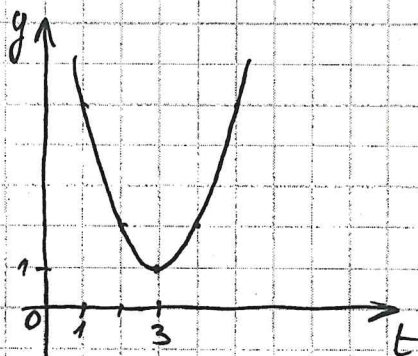
$$f(t) = t^2 - 6t + 10 \text{ - параболa}$$

Найдём вершину параболы:

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$n = 9 - 18 + 10 = 1$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			



$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 10 = 0$$

$$t^2 - 1 - 6t + 10 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t - 3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

$$\sqrt{x^2 + 1} = 3$$

$$x^2 + 1 = 9$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm\sqrt{8} (y = 1)$$

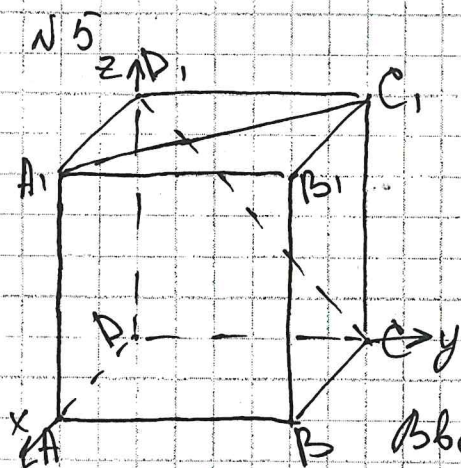
корень отрицательный.

Подставим значения x в прав. часть:

$$x = \sqrt{8}: \cos \frac{8 + \sqrt{16} - 4}{18} = \cos \frac{8}{18} \neq \cos 0 \Rightarrow x = \sqrt{8} - \text{не явл. реш-ем}$$

$$x = -\sqrt{8}: \cos \frac{8 - \sqrt{16} - 4}{18} = \cos \frac{0}{18} = \cos 0 = 1 \Rightarrow x = -\sqrt{8} - \text{явл. реш-ем}$$

Ответ: $-\sqrt{8}$



Дано: куб $ABCD, A_1, B_1, C_1, D_1$

пл-ть $\alpha \perp A_1C_1$

пл-ть $\beta \parallel CD_1$

Найти: $\alpha \cap \beta$

Решение:

Введём с-му координат. Пусть ст. куба = 1

$$A_1(1; 0; 1)$$

$$C(0; 1; 0)$$

$$A(1; 0; 0)$$

$$C_1(0; 1; 1)$$

$$D_1(0; 0; 1)$$

$$D(0; 0; 0)$$

$$\beta \parallel \overrightarrow{CD_1}$$

$$\overrightarrow{CD_1} \perp \overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \beta \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AD} - \text{вектор нормали к } \beta$$

$$\overrightarrow{AD} \in \{-1; 0; 0\}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$\alpha \perp \vec{A_1C_1} \Rightarrow \vec{A_1C_1}$ - вектор нормали к α .

$$\vec{A_1C_1} \{ -1; 1; 0 \}$$

$$\cos \angle \vec{AB}, \vec{A_1C_1} = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{A_1C_1}|}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{A_1C_1}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{A_1C_1} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$|\vec{AB}| \cdot |\vec{A_1C_1}| = \sqrt{1+0+0} \cdot \sqrt{1+1+0} = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2}$$

$$\angle \vec{AB}, \vec{A_1C_1} = 45^\circ = \angle \beta \text{ искомый. Ответ: } 45^\circ$$

