

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
135	12.03.25	Лыткин И. И.	<i>[Signature]</i>

Шифр 025-2-11-101

N 1

$$f(a, b, c) = (7 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (9 + c - a)^2$$

$$x = 7 + a - b$$

$$y = 2 + b - c$$

$$z = 9 + c - a$$

$$f(a, b, c) = x^2 + y^2 + z^2$$

~~$$x + y + z = 7 + a - b$$~~

$$x + y + z = (7 + a - b) + (2 + b - c) + (9 + c - a) = 18 \quad \checkmark$$

$$x = y = z = \frac{18}{3} = 6$$

$$x = y = z = 6$$

$$\begin{cases} 7 + a - b = 6 \\ 2 + b - c = 6 \\ 9 + c - a = 6 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} a - b = -1 \\ b - c = 4 \\ c - a = -3 \end{cases}$$

$$(a - b) + (b - c) + (c - a) = -1 + 4 - 3 = 0$$

$$a = b - 1$$

$$c = b - 4$$

$$b = 0 \quad a = -1, c = -4$$

$$f(a, b, c) = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108$$

Ответ: 108

Чистый случай

N 2

Дано:

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-00-101

Найти

$$S = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

Решение

$$1) S = \sum P(x_i) = \sum (x_i^6 + x_i^5 - 4x_i^4 + x_i^2 - x_i + 506)$$

$$S = \sum x_i^6 + \sum x_i^5 - 4 \sum x_i^4 + \sum x_i^2 - \sum x_i + 4 \cdot 506$$

Где $\sum x_i^6$, $\sum x_i^5$, $\sum x_i^4$ можно выразить через коэффициенты $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

$$2) x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = \sum x_i^2 + 2 \sum x_i x_j$$

$$\sum x_i^2 = (-1)^2 - 2 \sum x_i x_j$$

$$\sum x_i x_j = -4$$

$$\sum x_i^2 = 1 - 2(-4) = 1 + 8 = 9$$

$$3) x_i^4 = 4x_i^2 - x_i^3 - 1$$

$$\sum x_i^4 = \sum (4x_i^2 - x_i^3 - 1)$$

$$\sum x_i^3 = -\sum x_i^2 + 4 \sum x_i - 4 \Rightarrow \sum x_i^3 = -9 + 4(-1) - 4 = 9 - 4 - 4 = -17$$

$$\sum x_i^4 = 4 \cdot 9 - (-17) - 4 = 36 + 17 - 4 = 49$$

$$4) x_i^5 = 4x_i^3 - x_i^4 - x_i$$

$$\sum x_i^5 = 4(-17) - 49 - (-1) = -68 - 49 + 1 = -116$$

$$5) \sum x_i^6 = 4 \cdot (49) - (-116) - 9 = 196 + 116 - 9 = 303$$

$$6) S = 303 + (-116) - 4 \cdot 49 + 9 - (-1) + 4 \cdot 506$$

$$S = 303 - 116 - 196 + 9 + 1 + 2024$$

$$S = 2025$$

Ответ 2025

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-21-101

№3.

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{x^2+1} - 4}{18} = 0$$

$$t = \sqrt{x^2+1}$$

$$t^2 = x^2 + 1$$

$$x^2 - 6t + 11 - \cos \frac{x^2 + t - 4}{18} = 0$$

Если $\cos = 1$, то $x^2 - 6t + 11 - 1 = 0$

$$x^2 - 6 + 10 = 0$$

$$6t = x^2 + 10$$

$$t = \frac{x^2 + 10}{6}$$

$$t = \sqrt{x^2+1}$$

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{x^2+10}{6}$$

$$x^2+1 = \left(\frac{x^2+10}{6}\right)^2$$

$$x^2+1 = \frac{x^4+20x^2+100}{36}$$

$$36(x^2+1) = x^4+20x^2+100$$

$$36x^2+36 = x^4+20x^2+100$$

$$x^4-16x^2+64=0$$

$$y = x^2$$

$$y^2-16y+64=0$$

$$y = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 256}}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

Ответ: $x = \pm 2\sqrt{2}$

№4.

Уч.
некорректно

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-01-101

N4

Дано

$x_1, x_2, \dots, x_n$ - положительные числа

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Решение:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = x_1 x_2 \dots x_n$$

$$\frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} \leq x_1 x_2 \dots x_n$$

$$n \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n) x_1 x_2 \dots x_n$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

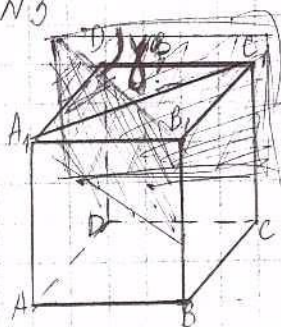
Применим среднее арифметическое - среднее геометрическое:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Ответ: неравенство доказано.

N5



Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

$l \perp A_1 C_1$

$\beta \parallel C P_1$

Найти: $\angle \alpha$?

$\angle$ между l и β - $\angle \alpha$

Решение:

Если сторона куба = 1, то

$A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $P(0, 1, 0)$ - нижняя грань.

$A_1(0, 0, 1)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$, $P_1(0, 1, 1)$ - верхняя грань.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр 025-2-00-101

$$\vec{A_1C_1} (1, 1, 0) \quad \checkmark$$

$$\vec{CD_1} (-1, 0, 1) \quad \checkmark$$

$$\cos \angle = \frac{|\vec{A_1C_1} \cdot \vec{CD_1}|}{|\vec{A_1C_1}| |\vec{CD_1}|} = 45^\circ$$

$$n_\alpha = (-1, 1, 0) \quad ?$$

$$n_\beta = (1, 0, 1) \quad \checkmark$$

$$\cos \angle = \frac{n_\alpha \cdot n_\beta}{|n_\alpha| |n_\beta|}$$

$$(-1, 1, 0) \cdot (1, 0, 1) = (-1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = -1$$

$$|n_\alpha| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|n_\beta| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \angle = \frac{-1}{(\sqrt{2})(\sqrt{2})} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\angle = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 120^\circ \quad ?$$

Ответ: угол между плоскостями - 45° .

45