Шифр 07757

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 20 | 20.03 | Корнеева Е.Е. | [signature] |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 0 | 7 | 7 | 3 | 20 |

Дано:
$0 < a < \frac{1}{2}$
$0 < b < \frac{1}{2}$

№4

Т.к. $b^2 - a^2 > b - a$, то

$(b-a)(b+a) - (b-a) > 0$

$(b-a)(b+a-1) > 0$

$b \neq a$, т.к. неравенство не выполняется

$(0 \cdot (b+a-1) \not> 0)$

если $b > a$, то

$\underbrace{(b-a)}_{>0} \cdot \underbrace{(b+a-1)}_{<0} > 0$

$b+a-1<0$, т.к. при max $a$ и $b$ их сумма меньше 1 по условию =>

при $b>a$ неравенство не выполняется

=> $b<a$, тогда $b-a<0$, но и $(b+a-1)$

=> произведение этих двух выражений даст положительное число, т.е $>0$ =>

неравенство выполняется при $b<a$.

$b^3 - a^3 > b-a$

$(b-a)(b^2+ab+a^2) > (b-a)$

$(b-a)(b^2+ab+a^2-1) > 0$

скобы

Шифр 07757

$(b-a)(b^2+2ab+a^2-1-ab)>0$

$(b-a)((b+a)^2-1-ab)>0$

$b-a<0.$

Т.к. $b+a<1$, то $(b+a)^2<1$ =>

$(b+a)^2-ab-1<0$

получаем, что оба выражения $<0$, =>

при их перемножении получим выражение

больше нуля, => неравенство выполняется

и $b^3-a^3>b-a$.

+

№3

Пусть $x$ и $y$ — массы сплавов золота и серебра,

а $z$ — масса серебряного бруска, $x_1$ и $y_1$ — массы золота в сплавах

Тогда:

1) сплавление двух сплавов:

$\frac{x_1+y_1}{x+y}=0,3$ => $(x_1+y_1)=0,3(x+y)$ (1)

2) Т.к. любой сплав можно сплавить с серебряным бруском и получится сплав, содержащий 20% золота, то:

а) $\frac{x_1}{x+z}=0,2$ и б) $\frac{y_1}{y+z}=0,2$

а) $x_1=0,2x+0,2z$ =>

07757

$$z = \frac{x_1 - 0{,}2x}{0{,}2} = 5x_1 - x$$

б) $y_1 = 0{,}2y + 0{,}2z$

$$z = \frac{y_1 - 0{,}2y}{0{,}2} = 5y_1 - y$$

$$\Rightarrow \quad 5y_1 - y = 5x_1 - x$$

$$5(y_1 - x_1) = y - x$$

$$y_1 - x_1 = \frac{y - x}{5} \quad (2)$$

Получим систему уравнений из (1) и (2):

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = 0{,}3(x+y) \\ y_1 - x_1 = \dfrac{y-x}{5} \end{cases}$$

Сложим:

$$2y_1 = \frac{y-x}{5} + \frac{3x+3y}{10} = \frac{2y-2x}{10} + \frac{3x+3y}{10}$$

$$2y_1 = \frac{5y+x}{10}$$

$$y_1 = \frac{5y+x}{20}, \text{ тогда}$$

$$z = 5y_1 - y = 5\left(\frac{5y+x}{20}\right) - y = \frac{5y+x}{4} - \frac{4y}{4} =$$

$$= \frac{y+x}{4}$$

$$\Rightarrow z = \frac{y+x}{4} \quad (3)$$

скобы

Шифр 07757

Если сплавить все три бруска, то процентное содержание золота будет находиться по формуле:

$$\frac{x_1+y_1}{x+y+z}$$

Подставим в формулу (1) и (3):

$$\frac{x_1+y_1}{x+y+z} = \frac{0,3(x+y)}{x+y+\frac{x+y}{4}} = \frac{0,3(x+y)}{\frac{4x+4y}{4}+\frac{x+y}{4}} =$$

$$= \frac{0,3(x+y)}{\frac{5x+5y}{4}} = \frac{1,2(x+y)}{5(x+y)} = \frac{1,2}{5} = \frac{2,4}{10} = 0,24$$

или 24 %

Ответ: 24 %.

Место для скобы

Шифр

11

$3^{4046} - 3^{2023} \cdot 5^{1012} + 5^{2024} =$

$= (3^{2023})^2 - 2 \cdot 3^{2023} \cdot 5^{1012} + (5^{1012})^2 + 3^{2023} \cdot 5^{1012} =$

$= (3^{2023} - 5^{1012})^2 + 3^{2023} \cdot 5^{1012}$

$3^1 = 3$

$3^2 = 9$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$3^5 = 243$

$3^6 = 729$

Период повторения последней цифры у 3, при возведении в степень равен 4.

=> последняя цифра числа $3^{2023}$ – это 7

у $5^{1012}$ последняя цифра – 5

$7 - 5 = 2$

при возведении в квадрат будет 4

=> число $(3^{2023} - 5^{1012})$ – составное. Откуда

У числа $3^{2023} \cdot 5^{1012}$ – последняя цифра – 5

Неверно

F

№2

$t^4 - 2\sqrt{13}\cdot t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$

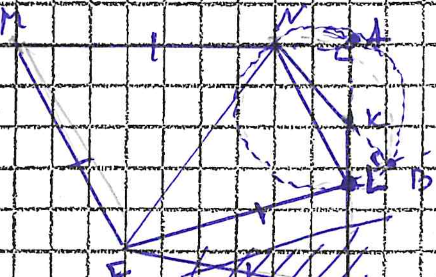
уравнение возвратное $\Rightarrow t \neq 0$

$(t^2)^2 - 2\sqrt{13}\, t^2 + \sqrt{13}^2 + t - \sqrt{13} = 0$ 4 корня! где?

$(t^2 - \sqrt{13})^2 + t - \sqrt{13} = 0$

$(t^2 - \sqrt{13})^2 > 0 \Rightarrow t - \sqrt{13} < 0$, т.е. $t < \sqrt{13}$ ?

№5




Продлим MN и KL, NK и LF, т.к. они перпендикулярны, то получаем два треугольника.

т. B и т. A где?

Наш Δ-ка ΔNBL и ΔNAL, опирающиеся на одну и ту же гипотенузу NL $\Rightarrow$ 4-х угольник NABL описан в окружность, где NL – диаметр окружности.

ΔFNB – прямоугольный, FN – больше 1, т.к. FB = FL + LB = 1 + LB (MN = MF = LF = 1 по условию) и при извлечении корня из $FB^2 + NB^2$ FN будет чуть больше 1.

Так же для прямоугольного ΔMAL ML > 1

NK + KL < 1 гарантированно, если NL < 1, т.к. по правилу суммы сторон Δ-ка NL < NK + KL