

| Общий балл | Дата     | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|----------|-------------|---------|
| 130        | 20.03.25 | Гусев А     |         |
| Шифр       |          |             | 918004  |

№1.

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

50

$$\frac{3x^2 + 3y^2 - 10xy}{3} = 0$$

$$(\sqrt{3}x \cdot \sqrt{3}y \cdot 2 = 6xy)$$

$$\frac{(\sqrt{3}x + \sqrt{3}y)^2 - 16xy}{3} = 0$$

$$\frac{(\sqrt{3}x - \sqrt{3}y)^2 - 4xy}{3} = 0$$

$$\frac{3(x+y)^2 - 16xy}{3} = 0$$

$$\frac{3(x-y)^2 - 4xy}{3} = 0$$

$$\frac{3((x+y)^2 - \frac{16}{3}xy)}{3} = 0$$

$$\frac{3((x-y)^2 - \frac{4}{3}xy)}{3} = 0$$

$$(x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy$$

$$\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{16}{3}xy}{\frac{4}{3}xy} = \frac{16xy \cdot 3}{3 \cdot 4xy} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = 2$$

Ответ: 2

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 5 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

№2.

Рассмотрим неравенства  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$  и  $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ 

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 < 21$$

Видно, что не при каждом значении будет выполняться неравенство. Найдем минимальные значения  $a, b, c$  для выполнения неравенства  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ .

$$2^2 + 3^2 + 3^2 = 22$$

$$1 + 4^2 + 2^2 = 21$$

Наши минимальные значения  $a, b, c$  для выполнения условия.

Рассмотрим неравенство  $a + b + c \geq 7$ . Допустим, что при выполнении условия  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21, a + b + c < 7$

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
|            |      | Шифр        | 918204  |

Под условие  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ , попадают такие минимальные значения, как: 2, и 3, и 3; 1, 4, 2.

$$1 + 4 + 2 = 7$$

$$2 + 3 + 3 = 7$$

В сумме  
сумма  
не достижима

Мы задаем, что  $a + b + c < 7$ . Неравенство не выполняется  
 $\Rightarrow a + b + c \geq 7$

30

к.т.г.

№3.

Преобразуем выражение.

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} \left( 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^3} \right)$$

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} \left( 1 - \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right) \right)$$

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} \left( 1 - \frac{2n^3 + n^2}{2n^6} \right) = 1 + \frac{2}{n} \left( 1 - \frac{n^2(2n-1)}{2n^6} \right)$$

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} \left( 1 - \frac{2n-1}{2n^3} \right)$$

10

№4.

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

$$a=1; b=p; c=-\frac{1}{2p^2}$$

$$D = b^2 - 4ac = p^2 + 4 \cdot \frac{1}{2p^2} = p^2 + \frac{2}{p^2} = \frac{p^4 + 2}{p^2}$$

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{\frac{p^4 + 2}{p^2}}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-p - \sqrt{\frac{p^4 + 2}{p^2}}}{2}$$

✓

✓

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

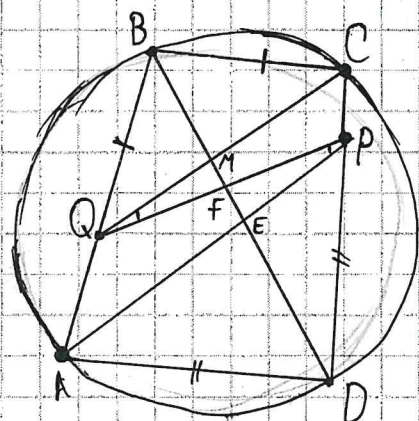
$$\left( \frac{-p + \sqrt{p^4 + 2}}{2p} \right)^4 + \left( \frac{-p - \sqrt{p^4 + 2}}{2p} \right)^4 =$$

$$= 14p^4 + 2 \frac{p^8 + 4p^4 + 4}{p^2} + 24$$

$$2 \left( 7p^4 + \frac{p^8 + 4p^4 + 4}{p^2} + 12 \right) \geq 2 + \sqrt{2}$$

25

н.т.д.



Ответ: не хватает условий.

Пояснение

Проведем QC и AP.

$\triangle QBC$  и  $\triangle ADP$  - равнобедренные (по св-ву признаку р/д)

$\angle BQC = \angle BCQ$   
 $\angle PAD = \angle APD$  } по свойствам равнобедренного  $\triangle$

$QC \parallel AP$

$\Rightarrow \angle CQP = \angle QPA$  (накрест лежащие у  $QC \parallel AP$  и секущей  $QP$ )

$\angle BFQ = \angle PFD$  (вертикальные)

$\Rightarrow \triangle QMF \sim \triangle PEF$  (по двум углам)

$$\frac{QF}{PF} = \frac{MF}{FE} \text{ (из подобия)}$$

$AQCP$  - параллелограмм (по ~~свойству~~ признаку пар-лиа  $AQ \parallel CP$ ,  $QC \parallel AP$ )

$\Rightarrow \angle CQA = \angle CPA$   
 $\angle CQP = \angle QPA$  }  $\Rightarrow \angle EPD = \angle BQB$

При этом  $\angle BMQ = \angle PED \Rightarrow \triangle QMB \sim \triangle PED$  (по 2 углам)

Из подобия:  $\frac{BQ}{PD} = \frac{QM}{PE}$

Из всего вышесказанного:  $\triangle QMF \sim \triangle PFD$

25



Открытая региональная  
межвузовская олимпиада

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |
| Шифр       |      |             |         |

Из всего вышеперечисленного:  $\triangle QMF \sim \triangle PFD$  (по углу и 2-м сторонам)

$$\frac{QF}{FP} = \frac{QM}{MD} = \frac{QB}{PD} \quad (\text{из подобия})$$

Данной информации недостаточно, чтобы утверждать равенство  $QF$  и  $FP$ , что в свою очередь нельзя утверждать, что  $BD$  делит  $PQ$  пополам.