Шифр 08962

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	20.03.24	Хмылёва Т.Е.	[подпись]

№3)

Пусть x - десятичная дробь, соответствующая проценту содержания в первом бруске золота, m - масса этого бруска, y - десятичная дробь, соответствующая проценту содержания во втором бруске золота, M - масса второго бруска, Ag - масса куска серебра.

Золота в случае сплавки двух брусков сплавов:

1) $xm + yM = 0,3(m+M)$ ✓

Золота в случае сплавки бруска сплава и бруска серебра:

2) $xm = 0,2(m+Ag)$; 3) $yM = 0,2(M+Ag)$ ✓

Подставляем 2) и 3) в 1):

$$0,2m + 0,2M + 0,4Ag = 0,3m + 0,3M$$

4) $Ag = \frac{m+M}{4}$

Пусть z - десятичная дробь, соответствующая проценту содержания золота в сплаве из трёх брусков:

$xm + yM = z(m+M+Ag)$. Подставляем 1) и 4)

$$0,3(m+M) = z \cdot 1,25 \cdot (m+M)$$

$$z = \frac{0,3}{1,25} = 0,24$$

24% - золота содержит сплав, если сплавить все три бруска вместе.

Ответ: 24% ✓

7б

Место для скобы

Шифр 08962

№ 4)

Рассмотрим второе условие: $b^2 - a^2 > b - a$

$$(b-a)(b+a) > b-a$$

При условии, что $b > a$, т.е. $b - a > 0$, выражение $b + a$ должно быть больше единицы.

Это невозможно, исходя из первого условия $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$

Значит, $b < a$ и $b - a < 0$

$$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$$

Из первого условия следует, что выражение $b^2 + ab + a^2 < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, а значит и меньше единицы, но больше нуля, т.к. $a > 0$ и $b > 0$

Таким образом, выражение $b - a < b^3 - a^3$, т.к. $0 < b^2 + ab + a^2 < 1$, ~~и при возведении~~, ч.т.д.

7б

№ 5)

Назовём сторону MF основанием пятиугольника.

~~1) Допустим, что один из углов при основании равен 90°.~~

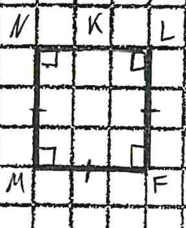
~~$NK < 1$, т.к. $NK < MF$~~

~~KL также много меньше единицы~~

~~$NK + KL < 1$~~

2) Допустим, что два угла при основании равны 90°.

Тогда точки N, K и L лежат на одной прямой.



$NK + KL = 1$, однако MNKLF – не пятиугольник, а четырехугольник.

Допустим, что один из углов при основании равен 90°.

$NK \perp LF$

$MN \perp KL$

Тогда невозможно построить пятиугольник по заданным условиям.

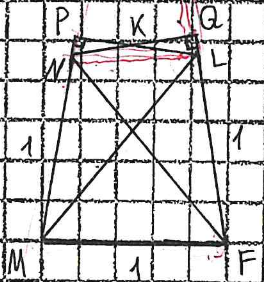
Т.к. $KL \perp MN$ и $LF \perp NK$, то построение одной из сторон невозможно.

Допустим, что один из углов при основании тупой, т.е. больше 90°:

Тогда пятиугольник является невыпуклым, т.е. отрезок KM лежит вне площади $MNKLF$.

Та же ситуация с пятиугольником, у которого два угла при основании – тупые.

Значит, углы при основании острые.



При условии, что $\angle MFQ = 90°$, $\triangle MFL$ – прямоугольный равнобедренный. В таком случае $ML = \sqrt{2}$. Т.к. $\angle MFQ < 90°$, то $ML < \sqrt{2}$.

Аналогично, в $\triangle MNF$, $ML < \sqrt{2}$

Рассмотрим $\triangle NQF$ – прямоугольный: $NF < \sqrt{2}$; $QF > 1$, $NF^2 = NQ^2 + QF^2$. Значит, $NQ < 1$

Рассмотрим $\triangle MPL$ – прямоугольный: $ML < \sqrt{2}$, $MN > 1$, $ML^2 = MP^2 + PL^2$ (по теореме Пифагора). Значит, $PL < 1$.

Оба отрезка NQ и PL меньше единицы, а значит и сумма их частей NK и KL также меньше единицы, т.к концы отрезков Q и L, и N и P лежат на одних прямых попарно, ч.т.д.

Место для скобы

Шифр 8962

№ 1)

Пусть $3^{2023}=a$, $5^{-1012}=b$, тогда

a^2-ab+b^2 – искомое число.

I $(a-b)^2+ab=a^2-2ab+b^2+ab=a^2-ab+b^2$

$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=(3^{2023}-5^{-1012})^2+3^{2023}\cdot 5^{-1012}$ – составное число

II $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^2-ab+b^2=\frac{a^3+b^3}{a+b}=\frac{3^{6069}+5^{-3036}}{3^{2023}+5^{-1012}}$ – составное число, т.к. помимо как на себя и на единицу, делится на другие числа,

ч.т.д.

0,5

№ 2)

$$t^4-2\sqrt{13}\cdot t^2+t+13-\sqrt{13}=0$$

$$t^4-2\sqrt{13}\,t^2+13+t-\sqrt{13}=0$$

$$(t^2-\sqrt{13})^2+t-\sqrt{13}=0$$

Значения $(t^2-\sqrt{13})^2$ убывают на $t\in(-\infty;-\sqrt[4]{13})$; при $t=-\sqrt[4]{13}$, $(t^2-\sqrt{13})^2=0$, затем при $t=0$ $(t^2-\sqrt{13})^2=13$, на $t\in(-\sqrt[4]{13};0)$, $(t^2-\sqrt{13})^2$ возрастает, при $t=\sqrt[4]{13}$ $(t^2-\sqrt{13})^2=0$, на $t\in(0;\sqrt[4]{13})$ $(t^2-\sqrt{13})^2$ убывает, затем на $t\in(\sqrt[4]{13};+\infty)$, $(t^2-\sqrt{13})^2$ возрастает.

Рассмотрим значения $\sqrt{13}-t$:

на ~~при~~ промежутке $t\in(-\infty;+\infty)$, $\sqrt{13}-t$ убывает.

Значит, корни в интервале $t\in(-\sqrt[4]{13};0)\cup(\sqrt[4]{13};+\infty)$.