

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
120	23.03.24	Генрих	

1/2/3/4/5  
2/6/0/3/1

$$\sqrt{4} \cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$$

Уравнение верно, если:

1)  $\cos^2 x = \sin x$     2)  $\cos^{2023}(2x) = \sin^{2023}(x)$

3)  $2024 \cos^{2025}(2x) = 2024 \sin^{2025}(x)$

верно.

всех.

30

Сведем все 3 уравнения к одному уравнению:

$$\cos^2 x - \sin x = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \sin x = t$$

$$-2t^2 - t + 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

используем метод перебора

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad y_1 = -2 \quad y_2 = 1$$

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

№2 1)  $0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < \frac{1}{2}$

2)  $y^2 - x^2 > y - x$

Решение:

1) Если  $y > x, y - x > 0$

$$y^2 - x^2 > y - x$$

$$(y-x)(y+x) > (y-x) : (y-x)$$

$$y+x > 1 \quad \text{не выполняется}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$0 < x+y < 1$$

$$0 < xy < \frac{1}{4}$$

№2 2) Если  $y \leq x$ , то  $y - x \leq 0$

$$(y-x)(y+x) \geq y-x \quad | : (y-x)$$

$$(y+x) \leq 1$$

$$y^3 - x^3 \geq y - x$$

$$(y-x)(y^2 + xy + x^2) \geq y-x \quad | : (y-x)$$

$$y^2 + xy + x^2 \leq 1$$

$$(y+x)^2 - 2xy + xy \leq 1$$

$$(y+x)^2 - xy \leq 1, \text{ т.к. } 0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$$

$$-4(xy) \leq 1$$

то  $(y+x)^2 - xy \leq 1$  неравенство верно

60

№2 Возьмем число abc d - четырехзначное число

Первые 2 цифры должны быть минимальными, чтобы было минимальное значение

Цифры 0000

⇒ тогда:  $a=1, b=0$ , остальные цифры должны

быть максимальными

20

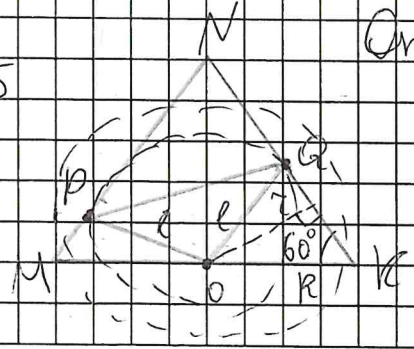
Возьмем 99, 99, 99, т.е. 1099, 1099, 1099

$$\frac{1099}{18} \approx 61,05 \quad \frac{1098}{18} \approx 61 \quad \frac{1089}{18} \approx 60,5$$

60,5 - наименьшее ⇒ число 1099 подходит

Ответ: число 1099

№5



Дано: равносторонний треугольник MNK.

№4 Дем-е

Точки P и Q лежат на окружности, центр которой — середина MK

Наибольший радиус  $R = \frac{1}{2} MK$

Наименьший радиус  $r$  — который касается сторон MK и MN

$$S_{\Delta} = 1 \quad \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 1 \quad a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = OK; \quad \Delta OЕК \quad \frac{r}{OK} = \sin 60^\circ$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \quad PQ < 2R; \quad PQ < 2r; \quad r < l < R$$

$$\frac{1}{2} < l < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < l < \frac{\sqrt{27}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{3}} < PQ < \frac{2\sqrt{27}}{3}$$