

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	20.03.24	Хисматова Т.Е.	

1. данное число по модулю 2 сравнимо с 1 и по модулю 3 сравнимо с 2.

для доказательства $3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36} \equiv_2 1$

разобью данное число на слагаемые $x = 3^{62}$ и $y = -3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36}$

~~$x \equiv_2 0$, т.к. это степень трой~~

$$3^{62} \equiv_2 1, 3^{31} \equiv_2 1, 2^{18} \equiv_2 0, 2^{36} \equiv_2 0$$

$-3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36} \equiv_2 0$, т.к. оба слагаемых кратны 2.

$\Rightarrow$ всё число будет иметь остаток 1 при делении на 2

для доказательства $3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36} \equiv_3 1$ ✓

разобью число на слагаемые $3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18}$ и 2^{36}

$$3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18} \equiv_3 0, \text{ т.к. оба слагаемых } : 3$$

$$2^{36} \equiv_3 1, \text{ т.к. } 2^6 \equiv_3 1 \Rightarrow 2^{36} = (2^6)^6 \equiv_3 1^6 = 1$$

таким образом получаем, что число делится на такое простое число, для которого верно $n \equiv_3 1$, где n — данное по условию число, а 3 — простое число.

число n может быть $n \equiv_3 1$; $n \equiv_3 1$

таким числом является 7.

проверю своё предположение, найду для каждого слагаемого, с чем оно сравнимо по модулю 7 и сложив результаты учтём знаки в примере ~~данного~~ ^{модулей}

$$3^2 \equiv 9 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2} \quad 3^4 \equiv 81 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2} \quad 3^8 \equiv 6561 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2} \quad 3^{16} \equiv 43046721 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2}$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3} \quad 3^4 \equiv 81 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3} \quad 3^8 \equiv 6561 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3} \quad 3^{16} \equiv 43046721 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \quad 2^6 \equiv 64 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \quad 2^9 \equiv 512 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4} \quad 2^{12} \equiv 4096 \pmod{4} \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\text{Итак получаем, что } 3^2 - 3^4 + 2^3 \equiv 1 - 0 + 0 \equiv 1 \pmod{2}$$

$\Rightarrow$ Число кратно семи, т.е. оно не простое, а составное

$$x^2 + kx + k = 0$$

формулировку "целый корень" будем рассматривать как "единственный целый корень"

$$D = k^2 - 4k$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$$

при целых k корни уравнения будут целыми при выполнении условия $n^2 = k^2 - 4k$, где n - целое число.

т.е. $n^2 = k(k-4)$, из чего следует, что в числе допустимых по условию значений для k только $k=0$ и $k=4$, т.к. из нуля увеличивается целый корень, являющийся целым.

Корень не может принимать другие значения, т.к. при любых других значениях k корней в уравнении будет 2.

Кроме того, k не может принимать другие значения, т.к. при любых других значениях k корней в уравнении будет 2.

3. Заметим, что процентное соотношение золота одинаково при смешивании сплавов, т.е. при смешивании сплавов с одинаковым содержанием серебра $\Rightarrow$ при перемешивании друг с другом процентное соотношение не меняется (оно у них одинаковое).

Найдём процент серебра в конечном сплаве:

$$\frac{4}{10}x + \frac{1}{8}y = \frac{4x + 1.25y}{8}$$

$$56x + 80y = 10x + 16y$$

($4x$ - показатель для x и 20 сплавов, $10x$ - показатель для y и 16 сплавов)

$$\frac{1}{10}x + x = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y \quad | \cdot 10 \quad (x \text{ и } y - \text{масса/объем сплава})$$

$$2y + 10x = 2x + 2y$$

серебра и друска сплава

$$2x = y$$

соответственно)

$$\frac{y}{2} = x$$

$$x = \frac{y}{2}$$

при добавлении в сплав оставшегося друска находим n:

$$x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{10}y = n(y + x)$$

$$\frac{y}{2} + \frac{y}{10} + \frac{y}{10} = n(2y + \frac{y}{2})$$

$$\frac{7y}{10} = n \cdot \frac{5y}{2}$$

$$n = \frac{14}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{25} = 0,56, \text{ т.е. } 56\% \text{ серебра будет в}$$

конечном сплаве $\Rightarrow 100 - 56 = 44\%$ золота будет в
конечном сплаве.

4. в левой части неравенства отношения числителей
и знаменателей ~~будет~~ будет больше в пользу меньшего
или никуда. Предположим, что $a < b < c$, тогда $\frac{a+1}{b+1} > \frac{a}{b}$;

$\frac{b+1}{c+1} > \frac{b}{c}$, но $\frac{c+1}{a+1} < \frac{c}{a}$ в данном случае неравенство

сохраняется вопреки тому, что только одно слагаемое

левой части меньше и соответствующего слагаемого

$$\frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} < \frac{b}{b+1} < \frac{b+1}{c+1} < \frac{c+1}{a+1} < \frac{c}{a}$$

однако между a и c разность больше, в следствии

чего предположение знаменателей

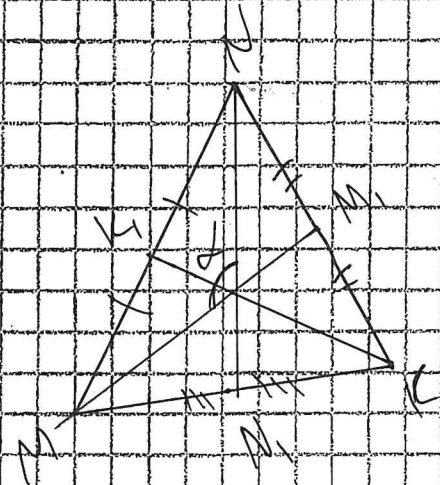
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq \frac{a+1}{a+1} + \frac{b+1}{b+1} \geq \frac{c+1}{c+1} + \frac{c}{c+1} \geq \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1}$$

5. $\alpha > 90^\circ$

$$\frac{\alpha}{360} > \frac{1}{4}$$

Угол $\angle OMN \leq 90^\circ$.

как мы знаем, градусной мере соответствует дуга окружности с центром в точке пересечения лучей, образующих угол и радиусом равным единице, т.е. если взять самый простой случай с $\triangle$ равнобедренным треугольником, в котором расстояние от точки O до любого из



углов будет равно единице, но окружность с центром O дуга, соединяющая точки M и N будет

равна $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ а отношение хорды MN

к двум дугам хорды будет равно больше, чем $\frac{1}{4}$.