

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
25	Хмелева	14.03.	

Шифр

052032

№1

$$\frac{1}{7} / \frac{2}{7} / \frac{3}{7} / \frac{4}{7} / \frac{5}{7} = 258$$

Пусть $x = 10 + a - b$ $y = 2 + b - c$ $z = 3 + c - a$

тогда $x + y + z = (10 + a - b) + (2 + b - c) + (3 + c - a) =$

Пусть $x = 10 + a - b$ $y = 2 + b - c$ $z = 3 + c - a$

тогда $x + y + z = (10 + a - b) + (2 + b - c) + (3 + c - a) =$

$$= 10 + 2 + 3 + a - a + b - b + c - c = 15$$

по неравенству Коши-Шварца:

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2$$

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq 15 \quad \text{тогда} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{225}{3}$$

$x^2 + y^2 + z^2 \geq 75$ Равенство становится верным

при $x = y = z = 5 \Rightarrow$

$$10 + a - b = 5 \quad 2 + b - c = 5$$

$$3 + c - a = 5$$

$$a - b = -5$$

$$b - c = 3$$

$$c - a = 2$$

$$a = 0 \quad b = 5 \quad c = 2$$

$$(10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2 = (10 + 0 - 5)^2 + (2 + 5 - 2)^2 + (3 + 2 - 0)^2 = 5^2 + 5^2 + 5^2 = 75$$

значение будет равно 75 ✓

75

№2

Пусть $f(x) = x^2 + ax + b$, где a и b являются целыми числами

Дано, что $f(x) \geq -\frac{9}{10}$ для всех реальных x

Сможете ли вы найти $f(x) = x^2 + ax + b$ это квадратичная функция с положительным старшим коэффициентом, она имеет минимальное значение

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

возводя в квадрат получаем

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

мин. значение $f(x)$ является $b - \frac{a^2}{4}$ которое достигается

при $x = -\frac{a}{2}$

и так как мы хотим иметь $b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{4}$

или $4a^2 - 40b \leq 36$ делим на 2 : $5a^2 - 20b \leq 18$

~~или~~ $b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{4}$ эквивалентно $4b - a^2 \geq -1$ или

$a^2 - 4b \leq 1$ или хотим показать что $a^2 - 4b \leq 1$

$5a^2 - 20b \leq 18$ так что $5(a^2 - 4b) \leq 18 \Rightarrow a^2 - 4b \leq \frac{18}{5}$

$a^2 - 4b$ должно являться целым $\Rightarrow a^2 - 4b \leq 3$

Если $a^2 - 4b = 2$ то a^2 должно быть четным, так что a должно быть четным. Пусть $a = 2k$

$4k^2 - 4b = 2 \Rightarrow 2k^2 + 2b = 1$, что невозможно

потому $2k^2 - 2b$ это четное число, но 1 не делится на 2

Если $a^2 - 4b = 3 \Rightarrow a^2 = 4b + 3$ рассматриваем по модулю 4

4, мы имеем $a^2 \equiv 3 \pmod{4}$ Однако квадратичные вычеты

по модулю 4 равны 0 и 1. Поэтому $a^2 \equiv 3 \pmod{4}$ невозможно

нашим образом $a^2 - 4b \leq 1 \Rightarrow b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{4}$

то неравенство $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ верно для всех x

7.5

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№3

Если дано число $a_1 = 25$ $a_{2025} = 625$

нужно d найти общую разность арифметической прогрессии

тогда $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{2025} = a_1 + (2025-1)d =$

$$= a_1 + 2024d$$

$$\text{Таким образом } 625 = 25 + 2024d$$

$$2024d = 600$$

$$d = \frac{600}{2024} = \frac{75}{253}$$

$$S = \sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{(\sqrt{a_{n+1}} + \sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d}$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{2024} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d} = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{2024} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$$

$$\text{Это очень долгая сумма, но можно! } S = \frac{1}{d} (\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}) =$$

$$= \frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{d} = \frac{25 - 5}{d} = \frac{20}{d} \Rightarrow d = \frac{75}{253}$$

$$S = \frac{20}{\frac{75}{253}} = \frac{20 \cdot 253}{75} = \frac{4 \cdot 253}{15} = \frac{1012}{15}$$

Ответ: $\frac{1012}{15}$

78

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50 \quad \text{и} \quad Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Мы хотим найти $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$, где x_1, x_2, x_3, x_4 являются корнями $Q(x) = 0$

Мы разделим $P(x)$ на $Q(x)$ чтобы получить

$$P(x) = (x^2 - x)(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) + 50 + 1 = (x^2 - x)Q(x) + 51$$

и так как $Q(x_i) = 0$

$i = 1, 2, 3, 4$ то нас есть:

$$P(x_i) = (x_i^2 - x_i)Q(x_i) + 51 = (x_i^2 - x_i)(0) + 51 = 51$$

тогда

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = \sum_{i=1}^4 51 = 4 \cdot 51 = 204$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|rrrrrr} & x^2 & & -x & & & \\ \hline x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 & x^6 & +x^5 & -4x^4 & -x^3 & +50 & \\ & x^6 & +x^5 & -4x^4 & -x^3 & & \\ \hline & & & & & & 50 \end{array}$$

таким $P(x) = (x^2 - x)Q(x) + 50$?

$$P(x_i) = (x_i^2 - x_i)Q(x_i) + 50 = (x_i^2 - x_i)(0) + 50 = 50$$

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = \sum_{i=1}^4 50 = 4 \cdot 50 = 200$$

Ответ: 200

45