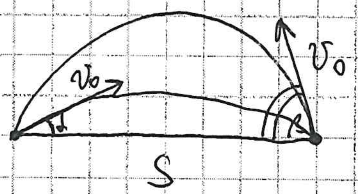
ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
76б		Червинская АС	[signature]

Шифр 041076

№2)



$\boxed{\frac{V_0^2}{g} \geqslant S}$

т.е. мячик долетел

$V_{x.1} = V_0 \cdot \cos\alpha$

$V_{y.1} = V_0 \cdot \sin\alpha - gt$

$V_{x.2} = V_0 \cdot \cos\beta$

$V_{y.2} = V_0 \cdot \sin\beta - gt$

$X_1(t) = V_{x.1}\, t = V_0 \cos\alpha\, t$ $\quad y_1(t) = V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$

$X_2(t) = S - V_{x.2}\, t = S - V_0 \cos\beta\, t$ $\quad y_2(t) = V_0 \sin\beta\, t - \frac{gt^2}{2}$

При t_1: $x_1(t_1) = S$, а $y_1(t_1) = 0$

$V_0 \cos\alpha\, t_1 = S$ $\quad V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = 0 \Rightarrow V_0 \sin\alpha\, t_1 = \frac{gt_1^2}{2}$

~~$V_0 \sin\alpha\, t_1 = S \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow S \operatorname{tg}\alpha = \frac{gt_1^2}{2}$~~ $\quad V_0 \sin\alpha = \frac{gt_1}{2}$

$V_0 \cos\alpha \cdot \frac{2V_0 \sin\alpha}{g} = S \Longleftarrow \frac{2V_0\sin\alpha}{g} = t_1$

$\boxed{\sin 2\alpha = \frac{Sg}{V_0^2}} \Leftarrow \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g} = S$

2α $\quad 2\alpha$

$\beta = 90 - \alpha$ т.к. $2\beta = 180° - 2\alpha$

Аналогично $\frac{V_0^2 \sin 2\beta}{g} = S \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin 2\beta \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta\cos\beta$

$l = \sqrt{(X_1(t) - X_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2} \Rightarrow$ для l_{min}: $\left(\sqrt{(x_1(t) - x_2(t))^2 + (y_1(t) - y_2(t))^2}\right)' = 0$

~~$\left((V_0\cos\alpha\, t + V_0 \cos\beta\, t - S)^2 + (V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} + V_0 \sin\beta\, t - \frac{gt^2}{2})^2\right)' = 0$~~

~~$\left(V_0^2 t^2 (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + V_0^2 t^2 (\sin\alpha - \sin\beta)^2\right)' = 0$~~

~~$2t(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2t(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 0$~~

~~$\left((V_0 t(\cos\alpha + \cos\beta) - S)^2\right)' + \left((V_0 t(\sin\alpha + \sin\beta) - (gt^2 + S))^2\right)' = 0$~~

~~$\left(V_0^2 t^2 (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 2V_0 t(\cos\alpha + \cos\beta) S + S^2\right)' = -\left(V_0^2 t^2 (\sin\alpha + \sin\beta)^2 - 2V_0 t(\sin\alpha + \sin\beta)(gt^2 + S) + g^2t^4 + 2gt^2 S + S^2\right)'$~~

~~$2t V_0^2 (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 2V_0(\cos\alpha + \cos\beta) S = -2t V_0^2 (\sin\alpha + \sin\beta)^2 + 2V_0(\sin\alpha + \sin\beta)(gt + ...)$~~

~~$2t V_0^2 \left((\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2\right) = 2V_0 (\cos\alpha S + \cos\beta S + \sin\alpha S + \sin\beta S + \sin\alpha\, gt^2 + \sin\beta\, gt^2)$~~

~~$g V_0 t (2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)) = 2V_0^2 (\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\beta\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cos\alpha + \sin^2\beta\cos\beta + (\sin\alpha + \sin\beta)\frac{g t^2}{2})$~~

(продолжение следует на стр. 2)

ОРМО

Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№2 продолжение)

$l_{min} = \sqrt{(x_1(t_0)-x_2(t_0))^2+(y_1(t_0)-y_2(t_0))^2}$, где $(l_{min})' = 0$

$x_1(t_0) = V_0\cos\alpha\, t_0$ $\qquad y_1(t_0) = V_0\sin\alpha\, t_0 - \frac{gt_0^2}{2}$

$x_2(t_0) = S - V_0\cos\beta\, t_0$ $\qquad y_2(t) = V_0\sin\beta\, t_0 - \frac{gt_0^2}{2}$

$$\left((V_0\cos\alpha\, t_0 - S + V_0\cos\beta\, t_0)^2 + \left(V_0\sin\alpha\, t_0 - \frac{gt_0^2}{2} - V_0\sin\beta\, t_0 + \frac{gt_0^2}{2}\right)^2\right)' = 0$$

$$\left((V_0(\cos\alpha+\cos\beta)t_0 - S)^2 + (V_0 t_0(\sin\alpha - \sin\beta))^2\right)' = 0$$

т.к. $\beta = 90-\alpha \Rightarrow \cos\beta = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$, а $\sin\beta = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$

$$\left((V_0(\cos\alpha+\sin\alpha)t_0 - S)^2\right)' + \left(V_0^2 t_0^2(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\right)' = 0$$

$$2V_0^2 t_0(\cos\alpha+\sin\alpha)^2 - 2V_0(\cos\alpha+\sin\alpha)S + 2V_0^2 t_0(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 = 0$$

$$V_0 t_0\left((\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2\right) - (\cos\alpha+\sin\alpha)S = 0$$

$$t_0 = \frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)S}{V_0(\cos^2\alpha + \cancel{2\cos\alpha\sin\alpha} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{2\cos\alpha\sin\alpha} + \sin^2\alpha)} = \frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)S}{2V_0}$$

$$l_{min}^2 = (x_1(t_0)-x_2(t_0))^2 + (y_1(t_0)-y_2(t_0))^2$$

$$l_{min}^2 = \left(\cancel{V_0}(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)S}{2\cancel{V_0}} - S\right)^2 + \cancel{V_0^2}\cdot\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2S^2}{4\cancel{V_0^2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 =$$

$$= S^2\left(\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-2}{2}\right)^2 + \frac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2S^2}{4} =$$

$$= S^2\left(\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^4 + (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2}{4}\right) = \frac{S^2(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{4}\left((\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2\right) =$$

$$\Rightarrow l_{min} = \frac{S(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2}\sqrt{2} = \frac{S(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\sqrt{2}}$$, но $\cos\alpha+\sin\alpha = \sqrt{1-\sin2\alpha}$

$\sin2\alpha = \frac{Sg}{V_0^2} \Rightarrow l_{min} = S\sqrt{\frac{V_0^2-Sg}{2V_0^2}}$

Ответ: $l_{min} = S\sqrt{\frac{V_0^2-Sg}{2V_0^2}}$

20б

ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

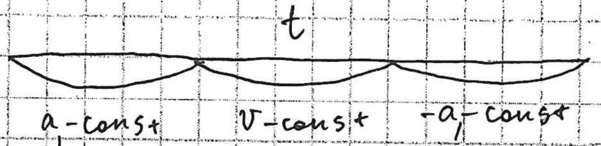
Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№1)

А:

Б:



$t_1 = \cancel{\frac{2S}{3a t^2}}$

$\frac{S}{3} = \frac{a t_1^2}{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S}{3a}}$

$\frac{S}{3} = v t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{S}{3v}$

$\cancel{\frac{S}{3} = v t_3 - \frac{a t_3^2}{2} \Rightarrow t_3^2 - \frac{2v t_3}{a} + \frac{2S}{3a} = 0}$

$\cancel{D = \frac{4v^2}{a^2} - 4 \cdot \frac{2S}{3a} = \frac{4}{a}\left(\frac{v^2}{a} - \frac{2}{3}S\right)}$

$\cancel{t_3 = \frac{\frac{2v}{a} \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{v}{a} \pm \sqrt{\frac{v^2}{a^2} - \frac{2S}{3a}}}$

$\frac{S}{3} = v t_3 - \frac{a t_3^2}{2} \Rightarrow \frac{a t_3^2}{2} - v t_3 + \frac{S}{3} = 0$

$D = v^2 - \frac{2aS}{3} \geq 0$, где $v = a t_1 \Rightarrow v^2 = \frac{2Sa}{3} \Rightarrow D = 0$

$\Downarrow$

$t_3 = \frac{2v}{2a} = \frac{v}{a} = t_1 = \sqrt{\frac{2S}{3a}}$

~~$\frac{t}{3} = t_1$, т.к. пут~~

$S = \frac{a_1 t^2}{18} + \frac{vt}{3} + \frac{vt}{3} - \frac{a_1 t^2}{18} = \frac{2}{3} v t \Rightarrow t = \frac{3S}{2v}$

$t_0 = t_1 + t_2 + t_3 = 2\sqrt{\frac{2S}{3a}} + \frac{S}{3v}$, но $a t_1 = v \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2S}{3a}}$

$t_1^2 = \frac{2S}{3a} \Rightarrow t_1 = \frac{2S}{3a t_1} = \frac{2S}{3v}$

$\Downarrow$

$t_0 = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{4S}{3v} + \frac{S}{3v} = \frac{5S}{3v}$

$\Downarrow$

$t_0 = \frac{5S}{3v} > \frac{3S}{2v} = t$

$\Downarrow$

$t_0 > t$

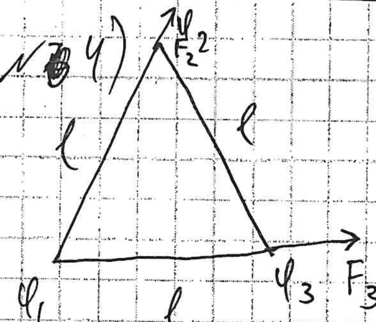
$\Downarrow$

$\Delta t = t_0 - t = \frac{5S}{3v} - \frac{3S}{2v} = \frac{S}{v \cdot 6}$

Ответ: Борис первый, $\Delta t = \frac{S}{6v}$

10б

№4)



$\varphi_1 = \frac{k q_1}{l} \Rightarrow q_1 = \frac{\varphi_1 l}{k}$

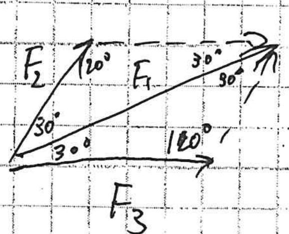
$\varphi_2 = \frac{k q_2}{l} \Rightarrow q_2 = \frac{\varphi_2 l}{k}$

$\varphi_3 = \frac{k q_3}{l} \Rightarrow q_3 = \frac{\varphi_3 l}{k}$

$F_2 = \frac{k q_1 q_2}{l^2} = \frac{\cancel{k} \varphi_1 \varphi_2 \cancel{l^2}}{k^{\cancel{2}} \cancel{l^2}}$

$F_3 = \frac{k q_1 q_3}{l^2} = \frac{\cancel{k} \varphi_1 \varphi_3 \cancel{l^2}}{k^{\cancel{2}} \cancel{l^2}}$

$F_1 = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3\cos 120^\circ} = \sqrt{F_2^2 + F_3^2 + F_2 F_3}$ $\Leftarrow$



$F_1 = \sqrt{\cancel{\varphi_1(\varphi_2 + \varphi_3)}\ \frac{\varphi_1^2 \varphi_2^2}{k^2} + \frac{\varphi_1^2 \varphi_3^2}{k^2} + \frac{\varphi_1^2 \varphi_2 \varphi_3}{k^2}} =$

$= \frac{\varphi_1}{k}\sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3} = 4\pi\varepsilon_0 \varphi_1 \sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3}$

Ответ: $F_1 = 4\pi\varepsilon_0 \varphi_1 \sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3}$

10б

ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

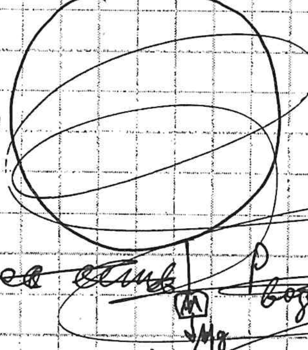
Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№5) $PV = \nu RT$, T – const и равно 43°C $\Rightarrow$ PV – const

$$\varphi_{отн.} = \frac{P_{~~шар~~\,водд.}}{P_{нас.\ пара}}$$

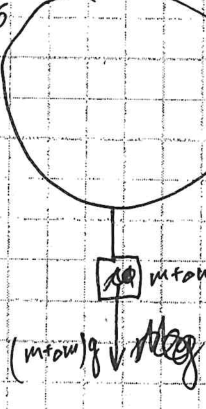
$\varphi_1 = 10\%$

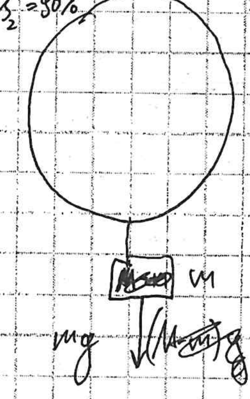


~~Изначально за бортом $P_{водд.} = 10\% \cdot 9000$ Па, ~~ ~~$P_{водд.1} = \varphi_1 \cdot P_{нас.\ пар}$ и $(P_{шар} - P_{атм} - P_{водд.1}) S_{шар.1} = Mg$~~

~~$V_{шар} = \frac{4}{3}\pi r^3$, $S_{шар} = 4\pi r^2$, тогда потом $\varphi_2 = 90\% \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow P_{водд.2} = \varphi_2 \cdot P_{нас.\ пар}$ и нам нужно скинуть $\Delta m = M - m$,~~
~~где $(P_{шар} - P_{атм} - P_{водд.2}) S_{шар.2} = mg \Rightarrow \Delta m = \frac{Mg - mg}{g} =$~~
~~$= \frac{(P_{шар} - P_{атм} - P_{водд.1}) S_{шар.1} - (P_{шар} - P_{атм} - P_{водд.2}) S_{шар.2}}{g}$~~

$\varphi_1 = 10\%$ $\varphi_2 = 90\%$





$\nu = \frac{m}{M} \Rightarrow PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \frac{PM}{RT} = \frac{m}{V} = \rho$

~~$\rho Vg + Mg$~~

$$\begin{cases} \rho_{в_1} g V = (m + \Delta m) g \\ \rho_{в_2} g V = mg \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\rho_{в_1} g V = mg + \Delta m g \Rightarrow \Delta m = \rho_{в_1} V - m$

$\Downarrow$

$\Delta m = \rho_{в_1} V - m = V(\rho_{в_1} - \rho_{в_2})$
т.к. $m = \rho_{в_2} V$

$M = 28\ \frac{г}{моль}$, $R = 8{,}31\ \frac{Дж}{моль \cdot К}$, $T = 316\ K$, $V = 5000\ м^3$

Тогда $\Delta m = V(\rho_{в_1} - \rho_{в_2}) = V\left(\frac{P_1 M}{RT} - \frac{P_2 M}{RT}\right)$, где $P_1 = P_0 - P_{атм} - P_{окр.\ вод.1}$

$P_{окр.\ вод.1} = \varphi_1 \cdot ~~\varphi~~ P_{~~окр.\ вод~~\ нас.\ пар} = 0{,}1 \cdot 9кПа = 900$ Па $P_2 = P_0 - P_{атм} - P_{окр.\ вод.2}$

$P_{окр.\ вод.2} = \varphi_2 \cdot P_{~~окр.\ вод~~\ нас.\ пар} = 0{,}9 \cdot 9кПа = 8100$ Па

$\Delta m = ~~V\varphi~~ \frac{VM}{RT}(P_1 - P_2) = \frac{VM}{RT} P_{~~окр.\ вод~~\ нас.\ пар}(\varphi_2 - \varphi_1) \approx 384$ кг

Ответ: $\Delta m \approx 384$ кг

12б

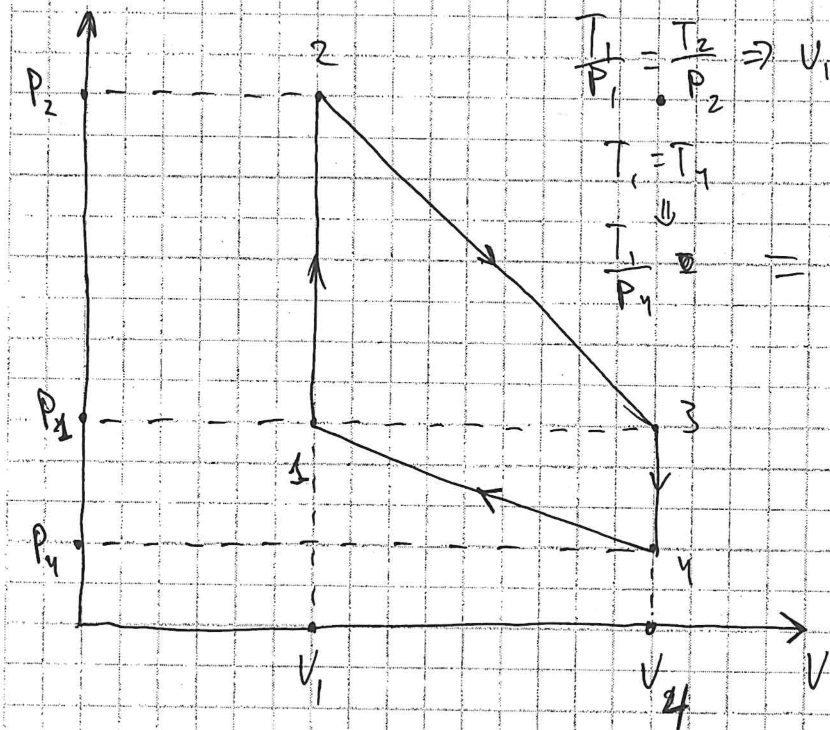
ОРМО

Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№3) $i=3$, $\eta = \frac{A}{Q}$. $PV = \nu RT \Rightarrow V = \nu R\frac{T}{P}$, тогда перечертим график для Оси V:



$\frac{T_1}{P_1} = \frac{T_2}{P_2} \Rightarrow V_1 = V_2$ и $\frac{T_3}{P_3} = \frac{T_4}{P_4} \Rightarrow V_3 = V_4$

$V_1 = \nu R\frac{T_1}{P_1}$

$T_1 = T_4$ $\Downarrow$ $T_2 = T_3$

$V_{34} = \nu R\frac{T_{34}}{P_{34}}$

$\frac{T_1}{P_4} = \frac{T_2}{P_3} \Rightarrow$

$\frac{V_4}{V_1} = 3$

$\Downarrow$

$P_2 = 3P_1$

$PV^\gamma = C \Rightarrow P = \frac{C}{V^\gamma}$

?

продолжение:

№2) $2tV_0^2(\cos\alpha+\cos\beta)^2 - 2V_0(\cos\alpha+\cos\beta)S = -2V_0^2 t(\sin\alpha+\sin\beta)^2 +$

$+ 2V_0(\sin\alpha+\sin\beta)S + 6V_0t^2g(\sin\alpha+\sin\beta) - 4g^2t^3 - 4gtS$

$4g^2t^3 - 6V_0g(\sin\alpha+\sin\beta)t^2 + (2V_0^2(2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)) + 4gS)t +$

$- 2V_0S(\sin\alpha+\sin\beta + \cos\alpha + \cos\beta) = 0$

~~Пусть t_3 — половина времени полёта~~ $\Rightarrow t_3 = \frac{V_0\sin\alpha}{g}$

$t^3 - \frac{3V_0(\sin\alpha+\sin\beta)}{2g}t^2 + \frac{V_0^2(1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+Sg}{g^2}t + \frac{V_0S(\sin\alpha+\sin\beta+\cos\alpha+\cos\beta)}{2g^2} = 0$

$\beta = 90-\alpha$: $t^3 - \frac{3V_0(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2g}t^2 + \frac{V_0^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+Sg}{g^2}t + \frac{V_0S(\sin\alpha+\cos\alpha)}{g^2} = 0$