

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
11		Евсеев	Евсеев
Шифр			043331

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 1 & - & 7 & - & 11 \end{array}$$

(2) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$, значит могут существовать такие числа a, b и c , что $a^2 + b^2 + c^2 = 21$. 21 можно представить в виде $1 + 4 + 16 = 1^2 + 2^2 + 4^2$. Это есть при $a \geq 1, b \geq 2$ и $c \geq 4$ неравенство становится верным. То есть при $a \geq 1, b \geq 2$ и $c \geq 3$, что значит, что мы добавили единицу к c , тогда выходит, что $a + b + c \geq 7$. Теперь докажем, что $a + b + c \geq d$ ~~при $d \leq 7$~~ не выполняется при $d < 7$. Чтобы это доказать, нам нужно попробовать добавить к a, b или c число, меньшее 1; заметим, что варианты с c тем же не подходят, так как 21 — это минимальная граница, и если мы к c добавим число, меньшее 1, то у нас получится число $1 + 4 + 16 < 1 + 4 + 16$, то есть $5 + 16 < 21$. Теперь добавим единицу к a . $a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 = 4 + 4 + 9 = 17 < 21 \Rightarrow$ не подходит. Попробуем добавить 4 к b . $a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 3^2 + 3^2 = 1 + 9 + 9 = 19 < 21 \Rightarrow$ тоже не подходит, а значит минимальное число, которое мы можем добавить к $a + b + c$ такое, чтобы выполнялось $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$, будет 1, что означает, что $a + b + c \geq 7$.

(1) $\frac{10}{3}xy = 3\frac{1}{3}xy = 5\frac{1}{3}xy - 2xy = 1\frac{1}{3}xy + 2xy$. $x^2 + y^2 = 5\frac{1}{3}xy - 2xy \Rightarrow$
 $x^2 + 2xy + y^2 = 5\frac{1}{3}xy \Rightarrow (x+y)^2 = 5\frac{1}{3}xy$. $x^2 + y^2 = 1\frac{1}{3}xy + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy =$
 $= 1\frac{1}{3}xy \Rightarrow (x-y)^2 = 1\frac{1}{3}xy$. $\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)^2}{1\frac{1}{3}xy} = \frac{5\frac{1}{3}xy}{1\frac{1}{3}xy} = \frac{10}{3} : \frac{4}{3} = 4 \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \pm 2$,
 но $x+y > 0$ (x, y — положительные по усл.), $x-y > 0$ ($x > y$ по усл.) $\Rightarrow \frac{x+y}{x-y} > 0 \Rightarrow$
 $\frac{x+y}{x-y} = 2$ исх обоснованно

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			043351

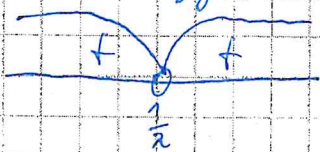
4.) x_1 и x_2 — корни $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$. Стоим попробовать применить т. Виета для $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$. $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}$. $(x_1 + x_2)^2 = p^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = p^2 \Rightarrow$
 $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2}\right) = p^2 + \frac{1}{p^2}$. $(x_1^2 + x_2^2)^2 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 + 2(x_1 x_2)^2 =$
 $= p^4 + \frac{1}{p^4} + 2 \Rightarrow x_1^4 + x_2^4 = p^4 + \frac{1}{p^4} + 2 - 2 \cdot \frac{1}{2p^4} = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2$.

$x_1^4 + x_2^4 = 2 + \left(p^4 + \frac{1}{2p^4}\right)$. Нам нужно доказать, что $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$, $\Rightarrow$ если мы докажем, что $\left(p^4 + \frac{1}{2p^4}\right) \geq \sqrt{2}$ или $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$, то докажем первоначальное неравенство. Докажем, что неравенство

$p^4 + \frac{1}{2p^4} < \sqrt{2}$ неверно. Возведем в квадрат левую и правую части:
 $p^8 + \frac{1}{p^8} + 2 < 2 \Rightarrow p^8 + \frac{1}{p^8} < 0$. Докажем, что неравенство $p^4 + \frac{1}{2p^4} < \sqrt{2}$ неверно. Возведем в квадрат: $p^8 + \frac{1}{4p^8} + 1 < 2 \Rightarrow$

$\frac{4p^{16} + 1}{4p^8} < 1 \Rightarrow 4p^{16} + 1 < 4p^8$. Или $p \geq 1$ тогда неравенство
 $4p^{16} + 1 < 4p^8$ неверно, так как $4p^{16} + 1 > 4p^8$. Или $-1 < p < 1$
 $4p^{16} + 1 > 4p^8$, а $4p^8 < 1 \Rightarrow 4p^{16} - 4p^8 + 1 < 0$. Заменим p^8 на t ,
тогда $4t^2 - 4t + 1 < 0$. Решим неравенство: $D = 16 - 16 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Используем метод интервалов:



При $t = 0$: $4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$. При переходе через $\frac{1}{2}$

знак не меняется, так как есть корни почленно
 $4t^2 - 4t + 1$ равно нулю. Получаем, что у неравенства

решений нет, а тогда и у неравенства $p^4 + \frac{1}{2p^4} < \sqrt{2}$ решений
нет, а значит $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$, а значит $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$, т.к.

$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$ имеет бесконечно много решений.