

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	20.06.24	Хмылева Т.Е.	

Заг. 1.

Найти \overline{abcd} такое, что $\frac{abcd}{a+b+c+d}$ было минимальным.

Решение.

Известной факт, что чем больше знаменатель и чем меньше числитель, тем меньше частное.

Перебираем возможные варианты строим так, чтобы a и b были минимальными, а c и d максимальными (числитель не меньше 1000, а знамен ≤ 36).

Учло 1099 была оптимальной, т.к.:

$$\frac{1199}{1+1+9+9} > \frac{1099}{1+9+9} \quad \left(\begin{array}{l} \text{увеличивать в алгебра нецел. возм-е,} \\ \text{сид - макс. возм-е} \end{array} \right)$$

Ответ: 1099

25

Заг. 2.

$$\text{Дано: } \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ (y^2 - x^2) > y - x \end{cases}$$

$$\text{Док-то: } y^3 - x^3 > y - x$$

Док-во.

$$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x), \text{ тогда } (y-x)(y+x) > y-x$$

↑ Если $y < x$, тогда получим $(-)\cdot(+)>(-)$.

Зная, что $0 < x < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$, получим:

$$-\frac{1}{2} < y-x, \quad y+x < 1.$$

Значит, $(y-x)(y+x) > -\frac{1}{2}$, но при этом учтем, что по модулю максимум чисел y и x не превышает $\frac{1}{2}$, следовательно произведение меньше любого из этих чисел (а именно этой суммой мы и рассуждаем). Тогда имеем

следующее: $|(y-x)(y+x)| < |y-x|$. Зная, что $y-x < 0$, получим $(y-x)(y+x) > y-x$. — Верное нерав-во по усл-ю $\Rightarrow \Rightarrow y < x$ — уга-ет усл-ю

II. Если $y=x$, тогда получим $0 > 0$ — неверное нерав-во $\Rightarrow \Rightarrow y \neq x$.

III. Если $y > x$.

Исходя из логики, описанной в I-м примере (про модуль), получим, что $y^2 - x^2 \leq y-x$, что противоречит усл-ю $\Rightarrow \Rightarrow y > x$ — не уга-ет логичности усл-ю

Переходим к основной задаче, зная, что $y < x$.

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) \quad 0 < y^2 < \frac{1}{4}, \quad 0 < x^2 < \frac{1}{4}, \quad 0 < xy < \frac{1}{4}$$

$$0 < y^2 + xy + x^2 < \frac{3}{4} \quad \text{по выше описанной логике следует,}$$

$$-\frac{1}{2} < y-x < 0 \quad \text{что } \frac{3}{8} < (y-x)(y^2 + xy + x^2) < 0, \quad \text{т.т.т.}$$

$$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cap \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cap \left(0; \frac{3}{4}\right).$$

70

Задача 3

Дано: n -ик $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad n \geq 0$
и $n \in \mathbb{Z}$.

1) $P(17) = P(101) = 2024$.

2) $|a_0| < 999$.

Найти всевозможные x и a_0 .

Решение.

$a_n = a_0 + n \cdot d$. $P(x)$ запишем в стандартном виде:

$P(x) = \sum_{i=0}^n (a_0 + i \cdot d) \cdot x^i = \frac{a_0 + (a_0 + n \cdot d) \cdot x^{n+1}}{2} - \frac{a_0 \cdot x^{n+1}}{2} = 2024$ $(a_0 + n \cdot d) \cdot x^n$

По условию, мы можем приравнять $P(17)$ и $P(101)$.

Выразив и сократив получим ур-е след. вида:

$a_0^2 (k \cdot 17^n + m \cdot 101^n + c) = 0$

умножая, что $|a_0| < 999$, получим, что ур-е верно только при $a_0 = 0$.

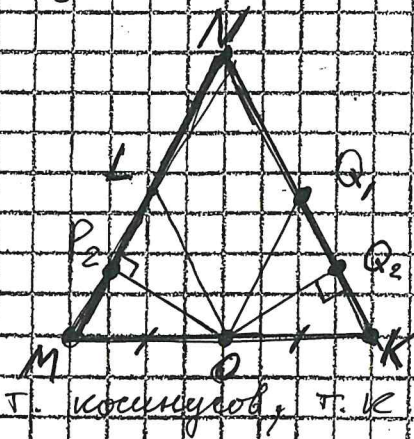
Ответ: при $a_0 = 0$.

Запр. 5

Решение. Из ур-я $S=1$ и $\triangle MNK - PK \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ где a - сторона

PQ_{max} - отрезок, где Q макс-ся на PK и перпендикулярен к Q_1 , а P макс-ся на P_2M и перпендикулярен к Q_2 .



Q_1M можно вычислить по т. косинусов, т.к OQ_1 - ср. лин. $\triangle MNK$, $\angle MOQ_1 = 180^\circ - \angle NMO = 120^\circ$, как внутр. смежные углы;

$MO = OQ_1 = \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Тогда по т. косинусов $PQ_{max}^2 = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \cdot 2 - 2(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} (2+1) = \sqrt{3} \Rightarrow PQ_{max} = \sqrt{3}$.

PQ_{min} - отрезок, где Q макс-ся на Q_2Q_1 и перпендикулярен к Q_2 , а

P макс-ая на MP_2 и мин-ая к P_2 , Тогда $\angle P_2 O Q_2 = 180 - 30 + 30 = 120^\circ$

По теореме косинусов $P_2 Q_2^2 = P_2 O^2 + O Q_2^2 - 2 P_2 O \cdot O Q_2 \cdot \cos 120^\circ$

$$P_2 O = O Q_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Тогда } P_2 Q_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} (2+1) = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Значит } P_2 Q_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $PQ \in (\frac{3\sqrt{3}}{2}; 3\sqrt{3}]$

Пояснения и построение чертёж:

$O_1 K = OK = OM = ML = LO = OQ_1$; $P_2 O$ и OQ_2 - высоты ланца $\triangle ABC$ $\triangle MLO$ и $O_1 OK$ соотв-но. Т.к. $\triangle MNK$ - $\triangle ABC$, то используем формулы для высоты OM и OK в $\triangle ABC$ (аналогично с $\triangle MLO$)

Заг. 4

Функции с разными периодами (лев и прав. части ур-я) пересекаются с периодичностью 2024π любых коэф-ов, т.к. считаем 2024π π 2π 4π 6π 8π 10π 12π 14π 16π 18π 20π 22π 24π 26π 28π 30π 32π 34π 36π 38π 40π 42π 44π 46π 48π 50π 52π 54π 56π 58π 60π 62π 64π 66π 68π 70π 72π 74π 76π 78π 80π 82π 84π 86π 88π 90π 92π 94π 96π 98π 100π 102π 104π 106π 108π 110π 112π 114π 116π 118π 120π 122π 124π 126π 128π 130π 132π 134π 136π 138π 140π 142π 144π 146π 148π 150π 152π 154π 156π 158π 160π 162π 164π 166π 168π 170π 172π 174π 176π 178π 180π 182π 184π 186π 188π 190π 192π 194π 196π 198π 200π 202π 204π 206π 208π 210π 212π 214π 216π 218π 220π 222π 224π 226π 228π 230π 232π 234π 236π 238π 240π 242π 244π 246π 248π 250π 252π 254π 256π 258π 260π 262π 264π 266π 268π 270π 272π 274π 276π 278π 280π 282π 284π 286π 288π 290π 292π 294π 296π 298π 300π 302π 304π 306π 308π 310π 312π 314π 316π 318π 320π 322π 324π 326π 328π 330π 332π 334π 336π 338π 340π 342π 344π 346π 348π 350π 352π 354π 356π 358π 360π 362π 364π 366π 368π 370π 372π 374π 376π 378π 380π 382π 384π 386π 388π 390π 392π 394π 396π 398π 400π 402π 404π 406π 408π 410π 412π 414π 416π 418π 420π 422π 424π 426π 428π 430π 432π 434π 436π 438π 440π 442π 444π 446π 448π 450π 452π 454π 456π 458π 460π 462π 464π 466π 468π 470π 472π 474π 476π 478π 480π 482π 484π 486π 488π 490π 492π 494π 496π 498π 500π 502π 504π 506π 508π 510π 512π 514π 516π 518π 520π 522π 524π 526π 528π 530π 532π 534π 536π 538π 540π 542π 544π 546π 548π 550π 552π 554π 556π 558π 560π 562π 564π 566π 568π 570π 572π 574π 576π 578π 580π 582π 584π 586π 588π 590π 592π 594π 596π 598π 600π 602π 604π 606π 608π 610π 612π 614π 616π 618π 620π 622π 624π 626π 628π 630π 632π 634π 636π 638π 640π 642π 644π 646π 648π 650π 652π 654π 656π 658π 660π 662π 664π 666π 668π 670π 672π 674π 676π 678π 680π 682π 684π 686π 688π 690π 692π 694π 696π 698π 700π 702π 704π 706π 708π 710π 712π 714π 716π 718π 720π 722π 724π 726π 728π 730π 732π 734π 736π 738π 740π 742π 744π 746π 748π 750π 752π 754π 756π 758π 760π 762π 764π 766π 768π 770π 772π 774π 776π 778π 780π 782π 784π 786π 788π 790π 792π 794π 796π 798π 800π 802π 804π 806π 808π 810π 812π 814π 816π 818π 820π 822π 824π 826π 828π 830π 832π 834π 836π 838π 840π 842π 844π 846π 848π 850π 852π 854π 856π 858π 860π 862π 864π 866π 868π 870π 872π 874π 876π 878π 880π 882π 884π 886π 888π 890π 892π 894π 896π 898π 900π 902π 904π 906π 908π 910π 912π 914π 916π 918π 920π 922π 924π 926π 928π 930π 932π 934π 936π 938π 940π 942π 944π 946π 948π 950π 952π 954π 956π 958π 960π 962π 964π 966π 968π 970π 972π 974π 976π 978π 980π 982π 984π 986π 988π 990π 992π 994π 996π 998π 1000π

$$x = \frac{\pi}{2} + 2024\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2024\pi m, m \in \mathbb{Z}$