Шифр 09164

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	20.06.24	Хмылёва Т. Е	[signature]

Зад. 1.

Найти $\overline{abcd}$ такое, что $\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d}$ было минимальным.

Решение.

Известный факт, что чем больше знаменатель и чем меньше числитель, тем меньше частное.

Перебираем возможные варианты стоит так, чтобы a и b были минимальными, а c и d максимальными (числитель не меньше 1000, а зн-ль ≤ 36).

Число $\underline{1099}$ явл-ся оптимальным, т.к.:

$\frac{1199}{1+1+9+9} > \frac{1099}{1+9+9}$ (увеличиваем в сильно нем, а — мин. возм-е, с и d — макс. возм-е)

20

Ответ: 1099

Зад. 2.

Дано: $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < y < \frac{1}{2} \\ (y^2 - x^2) > y - x \end{cases}$

Док-ть: $y^3 - x^3 > y - x$.

Док-во.

$y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$, тогда $(y-x)(y+x) > y-x$.

I Если $y < x$, тогда получим $(-)\cdot(+) > (-)$.

скобы

Шифр 09164

Зная, что $0<x<\frac{1}{2}$ и $0<y<\frac{1}{2}$, получим:

$-\frac{1}{2}<y-x$, $y+x<1$

Значит, $(y-x)(y+x)>-\frac{1}{2}$, но при этом учтём, что по модулю меньшие, чем 1, перемножая числа ~~на пром-ка $(0;1)$~~ мы всегда получим произведение меньшее любого из этих чисел (а именно этот случай мы и рассматриваем). Тогда имеем следующее: $|(y-x)(y+x)|<|y-x|$. Зная, что $y-x<0$, получим $(y-x)(y+x)>y-x$ — верное нерав-во по усл-ю $\Rightarrow$

$\Rightarrow y<x$ — уд-ет усл-ю

II. Если $y=x$, тогда получим $0>0$ — неверное нерав-во $\Rightarrow$

$\Rightarrow y\neq x$.

III. Если $y>x$.

Исходя из логики, описанной в I-м примере (про модули), получим, что $y^2-x^2<y-x$, что противоречит усл-ю $\Rightarrow$

$\Rightarrow y>x$ — не уд-ет нашему усл-ю

Перейдём к основной проблеме, зная, что $y<x$.

$y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+x^2)$ $0<y^2<\frac{1}{4}$, $0<x^2<\frac{1}{4}$, $0<xy<\frac{1}{4}$

$0<y^2+xy+x^2<\frac{3}{4}$; $\Rightarrow$ Из выше описанной логики следует,

$-\frac{1}{2}<y-x<0$ что $\cancel{-\frac{3}{8}}$ $(y-x)<(y-x)(y^2+xy+x^2)<0$, ч.т.д.

$(-\frac{1}{2};0)$ $<(-\frac{1}{2};0)\cdot(0;\frac{3}{4})$.

7б

Зад. 3.

Дано: мн-ен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $n\geq 0$

и $n\in\mathbb{Z}$.

Место для скобы

Шифр 09164

1) $P(17) = P(101) = 2024$.

2). $|a_0| < 999$.

Найти всевозможные зн-я a_0.

Решение.

~~$a_n = a_0 + n \cdot d$.~~ $P(x)$ состоит из слагаемых вида:

~~$P(17) = S_{17} = \frac{a_0 + (a_0+nd) \cdot 17^n}{2} \cdot n = 2024$~~ $(a_0 + nd) \cdot x^n$

По условию, мы можем приравнять $P(17)$ и $P(101)$.

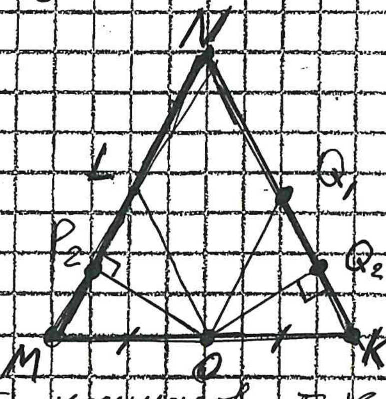
Выразив и сократив получим ур-е след. вида:

$a_0^2 (k \cdot 17^n + m \cdot 101^n + C) = 0$

учитывая, что $|a_0| < 999$, получим, что ур-е верно только при $a_0 = 0$.

Ответ: при $a_0 = 0$.

Зад. 5



Решение. Из усл. $S = 1$ и $\triangle MNK$ - р/с $\Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$, где a - стор.

PQ_{max} - отрезок, где Q нах-ся на Q_1K и стремится к Q_1, а P нах-ся на P_2M и стрем-ся к т. M. Q_1M можно выч-ть т. косинусов, т.к. OQ_1 - ср. лин. $\triangle MNK$, $\angle MOQ_1 = 180° - \angle NMO = 120°$, как внутр. одност. углы; $MO = OQ_1 = \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Тогда по т. косинусов $PQ_{max}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}(2+1) = \sqrt{3} \Rightarrow PQ_{max} = \sqrt[4]{3}$.

PQ_{min} - отрезок, где Q нах-ся на Q_2Q_1 и стр-ся к Q_2, а места для скобы

Шифр 09164

P нах-ся на MP_2 и симм-на к P_2. Тогда $\angle P_2OQ_2 = 180° - 30 - 30 = 120°$.

По т. косинусов $P_2Q_2^2 = P_2O^2 + OQ_2^2 - 2 P_2O \cdot OQ_2 \cdot \cos 120°$

$P_2O = Q_2O = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

Тогда $P_2Q_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2+1) = \cancel{\frac{3\sqrt{3}}{4}} = \cancel{\frac{3 \cdot 3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Значит $P_2Q_2 = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{2}$.

Ответ: $PQ \in \left(\frac{3^{\frac{3}{4}}}{2}; 3^{\frac{1}{4}}\right]$.

7,5

Пояснения к построению чертежа:

$Q_1K = OK = OM = ML = LO = OQ_1$; P_2O и OQ_2 – высоты малых р/с $\triangle$-ков MLO и Q_1OK соотв-но. Т.к. $\triangle MNK$ – р/с, то исп-зи формулы ~~для поиска~~ стор-й в р/с $\triangle$-ке. (аналогично с $\triangle MLO$)

Зад. 4

Функции с разными ~~…~~ коэф-ми и арг-ми (лев. и прав. части ур-я) пересекаются с периодичностью НОК из всех коэф-ов, т.к. синусы одинаковой четности. Значит период-ть корней равна $2024\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{\pi}{4} + 2024\pi m$ – уд-яет ур-ю и яв-ся ед-ным корнем.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2024\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

0,8