

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
24		Емелинов	Емелин
Шифр			040211

1/2/3/4/5/6
7/8/9/10/11/12/13/14/15/16/17/18/19/20/21/22/23/24

1) x и $y > 0$ и $x > y \Rightarrow x - y > 0$ и $x + y > 0 \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} > 0$
 $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \Rightarrow x^2 + \frac{4}{2}xy + y^2 = \frac{4}{2}xy + \frac{5}{2}xy \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = \frac{9}{2}xy \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x+y)^2 = \frac{9}{2}xy$
 $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \Rightarrow x^2 - \frac{4}{2}xy + y^2 = \frac{5}{2}xy - \frac{4}{2}xy \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = \frac{1}{2}xy \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x-y)^2 = \frac{1}{2}xy$

$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}}$ т.к. $\frac{x+y}{x-y} > 0 \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{\frac{9}{2}xy}{\frac{1}{2}xy}} = \sqrt{\frac{9}{1}} = 3$

Ответ: 3

2) $a^2 - a = a(a-1)$; $a^4 - a = a(a^3 - 1) = a(a-1)(a^2 + a + 1)$ $\Rightarrow$
 ~~$a^4 - a = a(a-1)(a^2 + a + 1)$~~
 $a^4 - a = a(a-1)$ и $a(a-1)(a^2 + a + 1) = 3(a-1)a$
 $= a(a-1)(a^2 + a - 2)$ т.к. $a(a-1)(a^2 + a - 2) : a(a-1)$ целое,
 $\frac{a(a-1)(a^2 + a - 2)}{a(a-1)}$ целое и равно $a^2 + a - 2$. $a^2 + a - 2$ целое и
 $a^2 - a$ целое $\Rightarrow a^2 + a - 2 - (a^2 - a)$ целое и равно $2a - 2 =$
 $= 2(a-1)$. т.к. $2(a-1) : 2$ и они оба целые, $\frac{2(a-1)}{2}$ целое и
 равно $a-1 \Rightarrow a-1+1$ тоже целое и равно a т.к. a .

3) $a_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1}{n^4} = \frac{(n^4 - 1) + 2n(n^2 - 1) + 2n^2 + 2n + 1}{n^4}$
 $= \frac{(n^2 + 1)(n - 1)(n + 1) + 2n(n - 1)(n + 1) + 2n^2 + 2n + 1}{n^4} = \frac{(n - 1)(n + 1)(n^2 + 2n + 1) + 2n^2 + 2n + 1}{n^4} = \frac{(n - 1)(n + 1)^3 + 2n^2 + 2n + 1}{n^4}$
 Тогда $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{79} = \frac{(1 \cdot 3^3) \cdot (2 \cdot 4^3) \cdot (3 \cdot 5^3) \cdot \dots \cdot (78 \cdot 80^3) + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 79^4} =$
 $= \frac{78! \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot 80^3 + 2^4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 79^4} = \frac{78! \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot 80^3 + 2^4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 1}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot \dots \cdot 79^4} = \frac{80^3}{2^4 \cdot 79} =$
 $= \frac{6^4 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0}{79} = 81 \frac{10}{79}$ Ответ: $81 \frac{10}{79}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

41011

№5) Дано:

$\triangle MNK$

$KM = KN$

MP и KL - биссектрисы

$MP = 2KL$

Знайти: $\angle MNK$

Решение: Пусть $\alpha = \angle KMP$, тогда $\angle NMP = \alpha$, а $\angle PKM = 2\alpha$.

Продлим KL за L на такое же расстояние (K'), тогда $MKNK'$ - параллелограмм, (т.к. $KL = LK'$ и $ML = LN$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MNK' = 2\alpha$ (Н.Л. углов) и $\angle NKK' = 2\alpha$ (Н.Л. углов).

$KP \parallel MK'$ (т.к. $MKNK'$ - паралл.) и $KK' = 2KL = MP \Rightarrow$

$\Rightarrow MKPK'$ - равнобедренная и параллельная (углы при вершине равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow MK = PK'$, причем $MK = KN = MK' \Rightarrow \angle MK'K = \angle MKK' = \frac{180^\circ - 4\alpha}{2}$

$= 90^\circ - 2\alpha$. $\angle NKK' = \angle MK'K$ (Н.Л. углов) $\Rightarrow \angle NKK' = 90^\circ - 2\alpha$.

$MK = PK'$ и $MK = K'N \Rightarrow PK' = NK' \Rightarrow \angle PAK' = \angle NPK' = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle KPK' = 180^\circ - \angle NPK' = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle KK'P = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) -$

$-(90^\circ - 2\alpha) = 4\alpha - 90^\circ \Rightarrow \angle MK'P = \angle KK'P \neq \angle MK'K = 90^\circ - 2\alpha + 4\alpha - 90^\circ$

$= 2\alpha \Rightarrow 2\alpha = 4\alpha$ ~~невозможно~~ как полукруг?

Ответ: 100° (неверно)

(неверно)

№4) ~~Вывести~~ m_1 - масса в 1 килограмме, m_2 - масса в 2,

m_1 - длина в 1, m_2 - длина, найти $\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}$. Сила тяжести

выразим $m_1 + m_2$ в килограммах, выразим 3π через

$\frac{m_1 - m_2}{m_1 - 1}$ $\frac{m_2}{m_1}$ и $\frac{m_2 + m_2}{m_2 + 1} = \frac{m_2}{m_2}$. Применяем и т.д.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

IV) Пусть в 1 корзине n_1 яблок массой m_1 , а во 2
 n_2 яблок массой m_2 . Пусть масса первого яблока x_1 , а 2 x_2 . Тогда

$$(1) \frac{m_1 + 3x_1}{n_1} = \frac{m_1 + x_1}{n_1 - 1}, \quad (2) \frac{(m_1 + x_1) \cdot 1,03}{n_1 - 1} = \frac{m_1 + x_1 + x_2}{n_1 - 2}, \quad (3) \frac{m_2 + 3x_2}{n_2} = \frac{m_2 + x_2}{n_2 + 1}$$

$$(4) \frac{(m_2 + x_2) \cdot 1,03}{n_2 + 1} = \frac{m_2 + x_2 + x_1}{n_2 + 2}, \quad \text{Получим } \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

$$\text{Выразим } 3x_1: 3x_1 = \frac{m_1 + x_1}{n_1 - 1} - \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_1 n_1 - x_1 n_1 - n_1 m_1 + m_1}{n_1(n_1 - 1)} =$$

$$= \frac{m_1 - x_1 n_1}{n_1(n_1 - 1)}$$

V) Дано: $\triangle MNK$

$$KM = KN$$

MP и KL - медианы.

~~Доказать~~

$$MP = 2KL$$

Решение: $\triangle MNK$

Решение. Пусть $\angle KMP = \alpha$, тогда $\angle PMN =$
 $= \alpha$ и $\angle KNM = 2\alpha$.

$$\begin{array}{r} 72 \\ 32 \\ \hline 104 \\ 32 \\ \hline 136 \\ 32 \\ \hline 168 \\ 32 \\ \hline 200 \end{array}$$

