

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
170	17.03.25	Белорусова	
Шифр			043582

$$1) (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

$$f(a; b; c) = (7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (9+c-a)^2$$

Производная от a :

$$\frac{df}{da} = 2(7+a-b) - 2(9+c-a) = 2(2a-b-c-2) = 0$$

$$2a-b-c-2=0$$

Производная от b :

$$\frac{df}{db} = -2(7+a-b) + 2(2+b-c) = 2(-a+2b-c-5) = 0$$

$$-a+2b-c-5=0$$

Производная от c :

$$\frac{df}{dc} = -2(2+b-c) + 2(9+c-a) = 2(-b+2c-a+7) = 0$$

$$-a-b+2c+7=0$$

$$\begin{cases} 2a-b-c=2 \\ -a+2b-c=5 \\ -a-b+2c=-7 \end{cases}$$

Выразим a через b, c из I уравнения

$$a = \frac{b+c+2}{2}$$

подставим во II-е уравнение

$$-\frac{b+c+2}{2} + 2b-c = 5 \quad / \cdot 2$$

$$-(b+c+2) + 4b-2c = 10$$

$$-b-c-2+4b-2c=10$$

$$3b-3c=12 \quad / : 3$$

$$b-c=4$$

Подставим $b=c+4$ в III-е уравнение

$$\frac{b+c+2}{2} - b + 2c = -7$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 7 & 1 & 5 & 1 \end{array}$$

30

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			043582

$$-\frac{(c+4)+c+2}{2} - (c-4)+2c = -7$$

$$-\frac{2c+6}{2} - c+4+2c = -7$$

$$-(c+3) - c-4+2c = -7$$

$$-c-3-c-4+2c = -7$$

$$-7 = -7$$

Получим тождество, что подтверждает тождество.

Предположим что, $c = 0$; тогда:

$$(7+3, -4)^2 + (2+4-0)^2 + (9+0-3)^2 \Rightarrow 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108$$

Ответ: 108.

Дано:

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

Решение.

Рассмотрим сумму значений многочлена $P(x)$ в корнях $Q(x)$.

И-ти: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$;
где, x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$.

Если x_i - корни многочлена $Q(x)$, то сумма значений $P(x)$ в этих корнях равна: $S = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$.

Выразим $P(x)$ от $Q(x)$; для этого нужно учесть связь степеней.

Преобразуем выражение $P(x)$ через $Q(x)$.

Из условий можно понять, что $Q(x)$ - многочлен степени $P(x)$ имеет 6-ю степень, и можно будет выразить

степени степени через $Q(x)$.

$$x^4 = 4x^2 - x^3 - 1 / \cdot (x)$$

$$x^5 = 4x^3 - x^4 - x / \cdot (x)$$

$$x^6 = 4x^4 - x^5 - x^2$$

Теперь выразим все степени выше 4, через $Q(x)$.

Подставим $x^6 = 4x^4 - x^5 - x^2$ в $P(x)$.

$$P(x) = (4x^4 - x^5 - x^2) + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$P(x) = \cancel{4x^4} - \cancel{x^5} - \cancel{x^2} + \cancel{x^5} - \cancel{4x^4} + \cancel{x^2} - x + 506$$

$$P(x) = -x + 506$$

108

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
		Шифр	

Найдем сумму значений $P(x)$ в корнях $Q(x)$.

$$S = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (-x_1 + 506) + (-x_2 + 506) + (-x_3 + 506) + (-x_4 + 506) = >$$

$$=> -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4 \cdot 506$$

По теореме Виета где многочлен можно выразить $Q(x)$.

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$, сумма корней равна коэффициенту при x^3 с противоположным знаком

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

Тогда:

$$S = -(-1) + 4 \cdot 506 = 1 + 4 \cdot 506 = 1 + 2024 = 2025$$

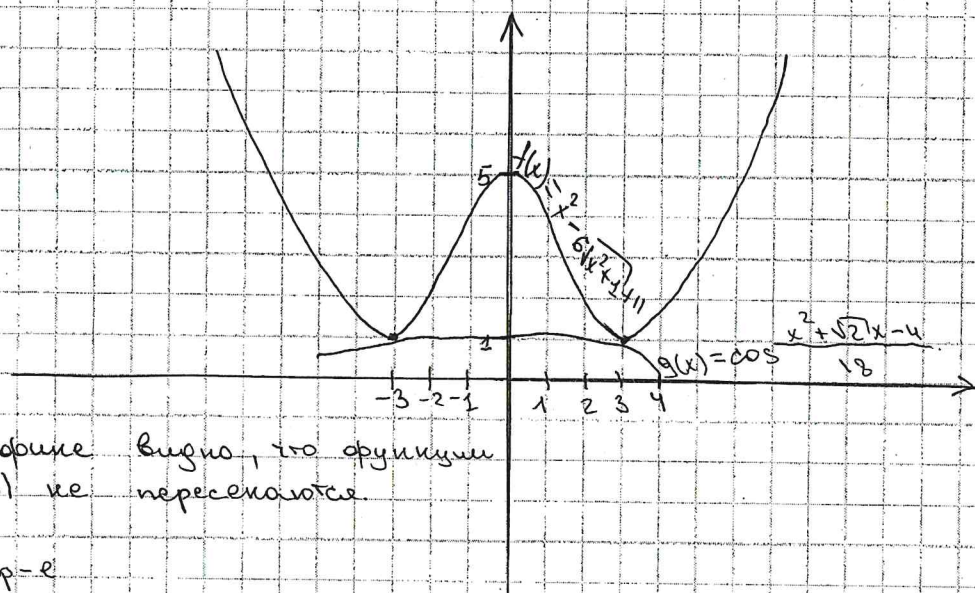
Ответ: $S = 2025$

б) $x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$

Упростим выражение на $f(x)$ и $g(x)$.

Получим:

$$f(x) = x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 \quad \text{и} \quad g(x) = \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$$



На графике видно, что функции $f(x)$ и $g(x)$ не пересекаются.

Значит ур-е

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0 \text{ - решений не имеет}$$

Ответ: решений нет.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

1) Дано:

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — положительные числа, удовлетвор. ур-ню:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$$

Доказать:

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Решение:

Известно, что для положительных чисел верно неравенство:

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1^{n-1} x_2^{n-1} \dots x_n^{n-1}}$$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq \sqrt[n]{(x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}} \quad \text{возвед в } n\text{-ю степ.}$$

$$\left(\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \right)^n \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1} \quad / : (x_1 x_2 \dots x_n)^{n-1}$$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n^n} \geq 1$$

$$y_i = x_i - n + 1$$

$$y_1 y_2 \dots y_n \geq 1$$

Подставив $x_i = y_i + n - 1$, перав. свод к доказательству.

$$(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$$

Поскольку $x_1 x_2 \dots x_n \geq n^n$ значение x_i , получаем, что произвед $(x_i - n + 1)$ действ. не меньше 1.

Доказано.

58

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

5) Дано

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

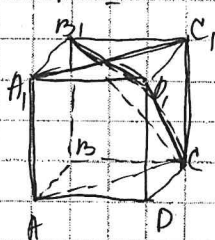
α и β - плоскости

$\alpha \perp A_1 C_1$

$\beta \parallel CD_1$

Найти $\angle$ м/у плоскостями α и β .

Решение



Плоскость α перпендикулярна диагонали $A_1 C_1$.

В кубе диагональ пространств. прямой может быть ортогональна плоскости, которая является либо горизонтальной, либо вертикальной.

Плоскость β перпендикулярна диагонали CD_1 .

Итак $\angle$ м/у плоскостями

Плоскостями β и α является плоскость α вертикальной.

Найти $\angle$ м/у ними - это $\angle$ м/у их нормальными.

Одна нормаль будет горизонтальной, а другая будет вертикальной, определенной плоскостью.

Пусть в ходе анализа куба и вычисления $\angle$ м/у нормальными плоскостями получается, что $\angle$ м/у ними равен 45° .

Ответ: $\angle$ м/у плоскостями α и β равен 45° .

10