

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
265	20.03.25	Темурова	А
Шифр			918410

1. $(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 - \min?$

Применим нер-во о средних для среднего арифметического и квадратического:

$$\sqrt{\frac{(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2}{3}} \geq \frac{10+a-b+2+b-c+3+c-a}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\# \frac{(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2}{3} \geq 25 \quad (75)$$

$$(10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 \geq 75 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Выражение не может быть $< 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ докажем, что 75 достигнуто:

$$\begin{cases} 10+a-b=5 \\ 2+b-c=5 \\ 3+c-a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b-5 \\ b=c+3 \\ 3+c-a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c-2 \\ b=c+3 \\ 5=5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ когда каждая скобка может быть равной 5, и $5^2 + 5^2 + 5^2 = 75 \Rightarrow 75$ достигнуто.

Ответ: 75



1	2	3	4	5
7	7	5	7	0

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			918410

$$2. F(x) = x^2 + ax + b; a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}$$

$$F(x) \geq -\frac{9}{10}, F(x) \geq -\frac{1}{4} - ?$$

Поскольку квадрат пере x^2 равен 1 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ при $f(x)$ — парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ точка минимума = у вершины, где

$$y = f(x) \\ x_0 = -\frac{a}{2} \Rightarrow y_0 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b = \\ = -\frac{a^2}{4} + b$$

$$y_0 \geq -\frac{9}{10} \Rightarrow -\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10} \quad | \cdot 4$$

$$-a^2 + 4b \geq -\frac{18}{5} = -3 - \frac{3}{5}; 4b - a^2 \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. } \\ a \in \mathbb{Z} \text{ и } b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4b - a^2 \text{ принадлежит от-} \\ \text{резку } [-3; +\infty) \in \mathbb{Z}$$

Докажем, что $4b - a^2 \neq -3$ и $4b - a^2 \neq -2$

Если $4b - a^2 = -2$, то:

$$b = \frac{a^2 - 2}{4}; b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 - 2 \div 4$$

Рассмотрим остатки a^2 по mod 4:

$$1^2 = 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$2^2 = 4 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$3^2 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$4^2 = 16 \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0 \pmod{4} \\ a^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 \equiv -2 \equiv 2 \pmod{4} \\ a^2 - 2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - 2 \equiv -2 \equiv 2 \pmod{4} \\ a^2 - 2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

2. Продолжение:

$$\Rightarrow a^2 - 2 \nmid 4 \Rightarrow \nexists \Rightarrow a^2 \nmid 4b - a^2 \neq -2$$

Если $4b - a^2 = -3$:

$$b = \frac{a^2 - 3}{4} \Rightarrow a^2 - 3 \div 4 (b \in \mathbb{Z})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 3 \equiv -3 \equiv 1 \pmod{4} \\ a^2 - 3 \equiv -2 \equiv 2 \pmod{4} \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 - 3 \nmid 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4b - a^2 \neq -3 \Rightarrow 4b - a^2 \neq -1 \Rightarrow b - \frac{a^2}{4} = y_{\min} - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

У.Т.А.

4. $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = ?$ (м.к. $f(x) \equiv 0$)

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 7$$

Преобразуем $P(x)$:

$$P(x) = x^2 (x^4 + x^3 - 4x^2 + 7) - x + 50 =$$

$$= x^2 \cdot (Q(x)) - x + 50$$

$$P(x_i) = x_i^2 \cdot (Q(x_i)) - x_i + 50, Q(x_1; x_2; x_3; x_4) = 0, \text{ так как } x_1 \dots x_4 - \text{корни } Q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 + 50 -$$

$$-x_2 + 50 - x_3 + 50 - x_4 + 50 = 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

20

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

4. Продолжение:

Применим для $Q(x) = 0$ Теорему Виета для 4-ой степени:

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \Rightarrow$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$$

$$\Rightarrow 200 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 200 + 1 = 201 =$$

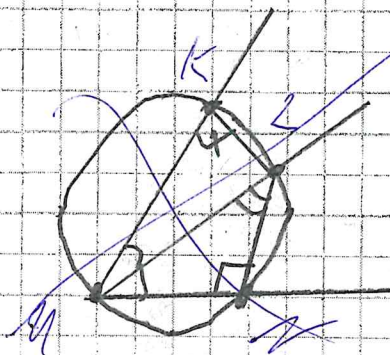
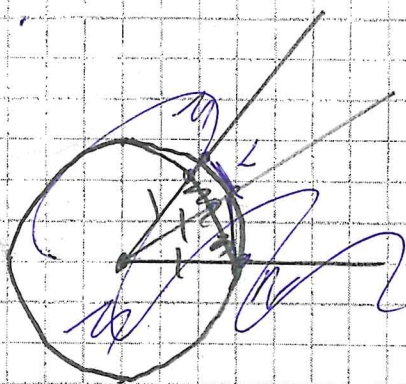
$$= P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

Ответ: 201



5.

Дано: 14-угольник. ОК



00

$$3. \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

$$a_1 = 25, a_2 \dots a_{2024}, a_{2025} = 625$$

$$a_2 = a_1 + 2; a_3 = a_1 + 2d \dots a_{2025} = a_1 + 2024d$$

3. Продолжения:

Движения книжки и сопряжённые:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1+d}}{(a_1 - a_1 - d)} + \frac{\sqrt{a_1+d} - \sqrt{a_1+2d}}{(a_1+d - a_1 - 2d)} + \dots \\
 & \frac{\sqrt{a_1+2023d} - \sqrt{a_1+2024d}}{(a_1+2023d - a_1 - 2024d)} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1+d} + \sqrt{a_1+d} - \sqrt{a_1+2d} + \dots}{d} \\
 & \frac{\sqrt{a_1+2023d} - \sqrt{a_1+2024d}}{(a_1+2023d - a_1 - 2024d)} = \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1+2025d}}{d} \\
 & = -\frac{\sqrt{a_1+2023d} - \sqrt{a_1+2024d}}{d} = -\frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1+2025d}}{d} \\
 & = -\frac{-600}{d} = \frac{600}{d}
 \end{aligned}$$

Königsein D:

$$625 = 25 + 2024d \Rightarrow d = \frac{600}{2024} \quad (\checkmark)$$

$$\Rightarrow \frac{600}{\sqrt{\quad}} = \frac{600}{\frac{600}{2024}} = 2024$$

Onlem: 2024

50