Место для скобы

Шифр 09051

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
15	20.09.24	Хмылёва Т.Е.	

4. (1) $0 < a < \frac{1}{2}$, $0 < b < \frac{1}{2}$ } по условию.

(2) $b^2 - a^2 > b - a$

$(b-a)(b+a) > (b-a)$

Допустим $a < b$, тогда $(b-a) > 0$ и для того, чтобы соответствовать условию (2), надо чтобы ~~$b+a > 0$~~ $(b+a) > 1$, тк если $(b+a) < 1$, то это будет считаться как деление, тк ~~идет умножение двух~~ ~~чисел~~ умножаем на число больше нуля, но строго меньше единицы, то есть на дробное число. Но, тк по ~~Тогда идем к след~~ условию $a < \frac{1}{2}$ и $b < \frac{1}{2}$, то $(a+b) < 1$, значит это предположение не подходит.

Тогда допустим, что ~~$b > a$, $(b=a$~~ $b < a$, тогда $(b-a) < 0$. Этот случай нам подходит, тк $(b+a) < 1$, то есть

Место для скобы

Шифр 09051

по модулю $(b-a)(b+a)$ будет меньше, чем $(b-a)$, а в отрицательных числах, то что меньше по модулю — больше.
Теперь докажем, что при таких условиях $b^3-a^3 > b-a$.
~~т.к $(b-a)$ остается~~
$b^3-a^3=(b-a)(b^2+ab+a^2)$, т.к $(b-a)$ остается отрицательным, попытаемся доказать, что $(b^2+ab+a^2)<1$, чтобы наше отриц. число по модулю было меньше, чем $(b-a)$, а соответственно больше (т.к в отриц. числах, те у кого модули меньше, те и больше).
Мы знаем, что $(b+a)<1$, т.к по условию a и b строго меньше $\frac{1}{2}$, значит и строго меньше 1.
$(b+a)^2<1^2$, исходя из того, что $(b+a)<1$, то их квадраты тоже, т.к в положит. числах.
$(b+a)^2<1^2=1$

Место для скобы

Шифр 09051

Также заметим, что $(в^2+ав+а^2) =$
$= (а+в)^2 - ав$, т.к $(а+в)^2 = а^2+2ав+в^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow а^2+2ав+в^2-ав = а^2+ав+в^2$.
В свою очередь мы уже доказали, что $(а+в)^2 < 1$, тогда также знаем, что $(а+в)^2 - ав < 1$, т.к $ав$ — положит. число, а при вычитании из положительного числа положительное оно уменьшается $(а \cdot в)$ — положительное, т.к по условию $0<а$ и $0<в$.
Значит $(в^2+ав+а^2) = (а+в)^2 - ав < 1$, то есть $(в^3-а^3) > в-а$, т.к $(в-а)(в^2+ав+а^2) > в-а$, т.к
1) $(в-а)$ — отриц. число
2) $(в^2+ав+а^2) < 1$ $\Bigg\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ модуль отриц. числа $|в^3-а^3| < |в-а|$, то есть число $в^3-а^3$ больше, т.к в отриц. числах чей модуль меньше, тот больше.
(Ответ: доказано).

7б

Место для скобы

Шифр 09051

3. Допустим, ~~сплав серебра~~ брусок серебра имеет массу — m. брусок сплава (1) имеет массу — m_1, брусок сплава (2) имеет массу — m_2.

1) Представим первый брусок ~~сплава~~ сплава:

$$\underset{(\text{золото})}{x_1 \cdot m_1} + \underset{(\text{серебро})}{y_1 m_1} = m_1$$

2) Представим второй брусок сплава:

$$\underset{(\text{золото})}{x_2 \cdot m_2} + \underset{(\text{серебро})}{y_2 m_2} = m_2$$

Под „x" имею в виду $\frac{m\,(\text{золота})}{m\,(\text{сплава})}$, а под „y" имею в виду $\frac{m\,(\text{серебра})}{m\,(\text{сплава})}$.

3) Представим общий сплав из двух брусков с золотом:

$$\underbrace{(x_1 m_1 + x_2 m_2)}_{\text{золото}} + \underbrace{(y_1 m_1 + y_2 m_2)}_{\text{серебро}} = m_1 + m_2$$

По условию:

$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}3$$

Место для скобы

Шифр

4) Представим сплав бруска серебра и бруска сплава (1):

$(x_1 m_1) + (y_1 m_1 + m) = m_1 + m$

золото серебро

По условию:

$\frac{x_1 m_1}{m_1 + m} = 0,2$

5) Представим сплав бруска серебра и бруска сплава (2):

$(x_2 m_2) + (y_2 m_2 + m) = m_2 + m$

золото серебро

По условию:

$\frac{x_2 m_2}{m_2 + m} = 0,2$

Нам надо найти:

$((x_1 m_1 + x_2 m_2) + (y_1 m_1 + y_2 m_2 + m) = m_1 + m_2 + m$

золото серебро

$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2 + m} = ?$

Место для скобы

Шифр

Для этого возьмем предыдущее уравнение:

$$\frac{x_1 m_1}{m_1 + m} = 0,2 \quad и \quad \frac{x_2 m_2}{m_2 + m} = 0,2,$$

Выводим из них:

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m &= \frac{x_1 m_1}{0,2} \\ m_2 + m &= \frac{x_2 m_2}{0,2} \end{aligned}\right\} \text{складываем эти уравнения:}$$

$$2m + m_1 + m_2 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{0,2}$$

Далее также возьмем из предыдущих уравнений:

Место для скобы

Шифр

$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{0{,}3}$$

Подставим получившееся уравнение в предыдущее:

$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{0{,}2} = 2m + m_1 + m_2 =$$

$$= 2m + \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{0{,}3}$$ Выразим из данного уравнения „m":

$$2m = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{0{,}2} - \frac{(x_1 m_1 + x_2 m_2)}{0{,}3} =$$

$$= \frac{3x_1 m_1 + 3x_2 m_2 - 2x_1 m_1 - 2x_2 m_2}{0{,}6} =$$

$$= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{0{,}6} \Rightarrow m = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{1{,}2}$$

Место для скобы

Шифр

Далее подставим найденный „m" в уравнение, ~~которое~~ ответ которого мы должны найти:

$$\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2 + m} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2 + \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{1,2}} =$$

$$= \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{\frac{1,2 m_1 + 1,2 m_2 + x_1 m_1 + x_2 m_2}{1,2}}$$

Далее вспомним, что из уравнения $\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2} = 0,3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0,3(m_1 + m_2) = x_1 m_1 + x_2 m_2$ — подставим данное уравнение:

$$\frac{0,3(m_1 + m_2) \cdot 1,2}{1,2 m_1 + 1,2 m_2 + 0,3(m_1 + m_2)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 1,2 (m_1 + m_2)}{1,2(m_1 + m_2) + 0,3(m_1 + m_2)} =$$

Место для скобы

Шифр

Считаем $(m_1 + m_2)$:

$$= \frac{0,3 \cdot 1,2}{\underset{(1,5)}{1,2 + 0,3}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{12}}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{15}} =$$

$$= \frac{6}{25} = 0,24$$

(Ответ: 0,24)

Место для скобы

Шифр

1. $3^{4046} - 3^{2023}\cdot 5^{1012} + 5^{2024} =$

$= (3^{2023})^2 - 3^{2023}\cdot 5^{1012} + (5^{1012})^2$

Представим $3^{2023} = x$
$5^{1012} = y$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - xy + y^2$, что в свою очередь равно. $(x-y)^2 + xy$

$(3^{2023} - 5^{1012})^2 + 3^{2023}\cdot 5^{1012} =$

$=$

?

1,5