

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
13	20.03	Карасев Е.Е.	И

1 2 3 4 5 Σ
0 2 4 4 3 13

задание n 2.

$$1) 0 < x < \frac{1}{2}; 0 < y < \frac{1}{2}$$

$$2) y^2 - x^2 > y - x$$

$(y-x)(y+x) > y-x$, т.к. x и y - положительные числа, то $x+y$ тоже число положительное

Рассмотрим три случая:

$$1) x = y$$

тогда $y-x=0$

$$0(y+x) > 0$$

не удовлетворяет условию задачи

$$2) x > y, \text{ тогда } y-x < 0$$

$$(y-x)(y+x) > (y-x) / (y-x)$$

$$y+x < 1$$

$$y < x \text{ где } y > 0 \text{ (по условию), } x$$

$$\text{т.к. } 0 < x+y < 1, \text{ то } y+x < 1 - \text{верное неравенство}$$

$$y^2 - x^2 = (y-x)(y^2 + x^2 + xy)$$

$$(y-x)(y^2 + x^2 + xy) > (y-x) / (y-x)$$

$$y^2 + x^2 + xy < 1$$

$$a_0 = 307, a_0 = 0$$

$$y = x + x^3 + x^5$$

$$-1 -1 -1$$

$$-4 -$$

$$11111729$$

$$-72915$$

$$3820$$

$$11111$$

$$729$$

$$\times 8$$

$$729$$

Предположение заданы x, y .

т.к. $0 < y < \frac{1}{4}$, $0 < x^2 < \frac{1}{4}$, $0 < xy < \frac{1}{4}$

Поэтому $0 < y^2 + x^2 + xy < \frac{3}{4}$, значит $y^2 + x^2 + xy < 1$ - неравенство выполняется ~~потому что $x < 0$, $y < 0$, $x^2 < 0$, $y^2 < 0$, $xy < 0$~~

с.т.р.

3) $x > y$

тогда $y - x > 0$

$(y - x)(y + x) > y - x \quad | : (y - x)$

$y + x > 1$ - неверное равенство т.к. $0 < xy < \frac{1}{4}$

не соответствует условию задачи

Задача ≈ 4 .

$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$

Рассмотрим функцию: $f(t) = t + t^{2023} + 2024t^{2025}$ - данная функция является монотонной, т.к. содержит только нечетные степени косинуса косинусов.

Поскольку $f(\cos(2x)) = f(\sin(x))$ данное уравнение будет иметь решения только при условии: $\cos(2x) = \sin(x)$ - по свойству монотонности

$\cos 2x = \sin x$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \sin x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Пусть $\sin x = t \quad t \geq 0$

$2t^2 + t - 1 = 0$

Продолжение задания ~ 4.

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$t = \frac{1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1-3}{4} = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

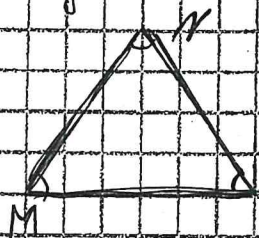
$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

X

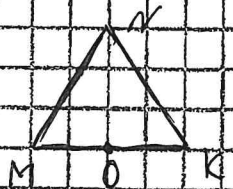
Задание ~ 5.



Пусть стороны треугольника равны x (треугольник равносторонний поэтому у него все стороны равны и все углы равны (каждый угол 60°)).

$$S = 1 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3}x^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

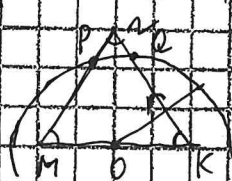


O - середина MK, поэтому $PO = QO$

P и Q равноудалены от O, поэтому они лежат на одной окружности с центром в O (обозначим радиус этой окружности за r)

Рассмотрим несколько случаев

1) $r \geq \frac{x}{2}$, тогда окружность будет пересекать каждую из сторон MM и KK только один раз, эти точки пересечения и будут точки P и Q $\rightarrow$



Данный вариант не подходит

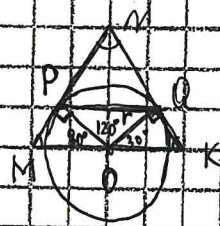
6) $\triangle MPO$: $OP = OM = r \Rightarrow \angle PMO = \angle MPO = 60^\circ \Rightarrow \angle POM = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

В $\triangle POQ$ по Γ косинусов:

$$PQ^2 = OQ^2 + OP^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos 120^\circ$$

$$PQ^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{\sqrt{3}} + 4 \Rightarrow PQ = 2\sqrt{\frac{2}{3} + 1} \quad (1)$$

3) Рассмотрим момент, когда окружность будет касаться



43. $\triangle OQK$: $\sin \angle QKO = \frac{OQ}{OK}$ 5

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{r\sqrt{5}}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1, \text{ из } \triangle POQ \text{ по т. косинусов: } PQ = \sqrt{3} + 3 \quad (2)$$

при $r = \sqrt{3}$ РД 11МК, значит, разный вариант

не происходит

4) ~~$\frac{1}{\sqrt{2}}$~~ ~~$\frac{1}{\sqrt{3}}$~~ ~~$\frac{1}{\sqrt{4}}$~~ ~~$\frac{1}{\sqrt{5}}$~~ $\frac{2}{\sqrt{5}} < r < \sqrt{3}$

Продолжение задания ~ 5

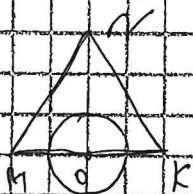


В данном случае окружность пересекает ML и LK в двух местах каждую сторону

Точки будут удовлетворять условию задачи при их взаимном расположении как на рисунке (P и Q или P' и Q')

Тогда $2\sqrt{\frac{2}{3}+1} < PQ < \sqrt{2\sqrt{3}+3}$ (из (1) и (2))

5) $r < \sqrt{3}$



Окружность не пересекает ML и LK , поэтому здесь решений нет.

Ответ: $2\sqrt{\frac{2}{3}+1} \leq PQ < \sqrt{2\sqrt{3}+3}$

Задание ~ 1.

~~Важно~~ Пусть сумма цифр будет равна x :

$1 \leq x \leq 36$

Отношение четырехзначного числа к сумме его ~~чисел~~ ^{цифр} не будет превышать: $1000:36 = 27\frac{43}{36}$.

Наименьшая с числа 3600 отношение числа к сумме его ~~чисел~~ ^{цифр} будет больше или равно 100 ($3600:36=100$)

Минимальное отношение четырехзначного числа к сумме его ~~чисел~~ ^{цифр} будет у числа 1099

$1099:(1+9+9) = 57\frac{16}{19}$, 1099 - единственное четырехзначное число у которого отношение числа к сумме его цифр меньше 60



Продолжение задания №1.

Ответ: 1099.

Задание №3.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P(17) = P(101) = 2024$$

$$P(17) = a_n 17^n + a_{n-1} 17^{n-1} + \dots + a_1 17 + a_0 = P(101) = a_n 101^n + a_{n-1} 101^{n-1} + \dots + a_1 101 + a_0 = 2024$$

$$P(17) - a_0 = 2024 - a_0$$

$$P(101) - a_0 = 2024 - a_0$$

Многочлен $P(17) - a_0$ делится нацело на 17, значит
и $2024 - a_0$ делится нацело на 17

Многочлен $P(101) - a_0$ делится нацело на 101, значит
и $2024 - a_0$ делится нацело на 101

Поскольку $2024 - a_0$ делится нацело на и на 17, и на 101,
значит делится нацело на $17 \cdot 101 = 1717$

т.к. $|a_0| \leq 999$, то $2024 - 999 < 2024 - a_0 < 2024 + 999$

$$1025 < 2024 - a_0 < 3023$$

Единственное число из этого промежутка, которое
делится нацело на 1717 — число 1717 , значит

$$2024 - a_0 = 1717 \Rightarrow a_0 = 2024 - 1717 = 307$$

Ответ: $a_0 = 307$.

X