**Шифр** 07724

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 29 | 21.03 | Корнеева Е.Е. | [signature] |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 7 | 7 | 2 | 29 |

~~Задан~~ Задание №3

$$\begin{cases} P(17)=2024; \\ P(101)=2024; \end{cases} \quad \begin{cases} P(17) \underset{17}{\equiv} a_0 \underset{17}{\equiv} 2024 \\ P(101) \underset{101}{\equiv} a_0 \underset{101}{\equiv} 2024 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 \underset{17}{\equiv} 2024 \underset{17}{\equiv} 1; \\ a_0 \underset{101}{\equiv} 2024 \underset{101}{\equiv} 4; \end{cases} \begin{cases} a_0 \underset{17}{\equiv} 1 \\ a_0 \underset{101}{\equiv} 4 \end{cases} \Rightarrow \quad a_0 = 101k+4,\ k\in\mathbb{Z} \quad (1)$$

$$101k+4 \underset{17}{\equiv} 1;$$

$$\Rightarrow -k+4 \underset{17}{\equiv} 1; \quad -k \underset{17}{\equiv} -3; \quad k \underset{17}{\equiv} 3; \Rightarrow k=17m+3,\ m\in\mathbb{Z} \quad (2)$$

Подставим (2) $\longrightarrow$ (1):

$$a_0 = 101\cdot 17m + 303 + 4 = 1717m + 307;\ m\in\mathbb{Z}$$

Исходя из условия, что $|a_0| < 999$, нам подойдёт лишь $a_0 = 307$.

Иначе $|a_0| > 999$.

Ответ: 307.

# Задание №1

У нас есть число $\overline{abcd} = 1000\cdot a + 100\cdot b + 10\cdot c + d$, где $a, b, c, d \in N$, $\le 9$, $a \ge 1$

Необходимо, чтобы $\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}$ было наименьшим.

$$\frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d} = 1 + \frac{999a+99b+9c+\cancel{d}}{a+b+c+d}$$

Необходимо чтобы $999a+99b+9c$ было наименьшим, тогда нужно минимальное число „a". $a = 1$.

Необходимо, чтобы $a+b+c+d$ было наибольшим. Тогда $d = 9$, остальная часть не зависит от $d$.

Если $a > 1$, то числитель увеличивается сильно, а знаменатель слабо.

Докажем это подставив $a = 1$ и $a = 2$.

$m = 99b+9c$; $r = b+c+d$;

$$\frac{999+m}{1+r} * \frac{1998+m}{2+r};$$

$$1998+999r+2m+mr * 1998+1998r+m+mr$$

$$m * 999r$$

$$99b+9c < 999b+999c+999d$$

Всё таки $a = 1$, $d = 9$. Продолжение на следующей странице 3

скобы

Шифр 07724

$a=1; d=9$. Подставим

$$1+\frac{999+99b+9c+\cancel{?}}{10+b+c}=1+9+\frac{909+90b}{10+b+c}$$

Теперь числитель не зависит от „c".
А знаменатель зависит. => $C=9$, чтобы увеличить знаменатель.

$a=1;\ c=9;\ d=9$ Подставим

$$10+\frac{909+90b}{19+b}=10+\frac{1710+90b-801}{19+b}=100-\frac{801}{19+b}$$

Теперь $\left(-\frac{801}{b+19}\right)$ должно быть наименьшим.
а следовательно нужно взять $b=0$, чтобы $\left(-\frac{810}{b+19}\right)$ было как ~~можно меньше~~.

конверт-е.

$a=1,\ b=0;\ c=9;\ d=9$.

$\overline{abcd}=1099$

Ответ: 1099

Задание №2

Рассмотрим 2-ое условие:

$y^2-x^2>y-x;\quad (y-x)(x+y-1)>0$

$\begin{cases} 0<x<\frac{1}{2} \\ 0<y<\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y<1 \Rightarrow x+y-1<0$

Тогда $(y-x)<0$. Продолжение на следующей стр. 4

Шифр 07724

Рассмотрим условие, которое нужно доказать

$y^3 - x^3 > y - x$ ; $(y-x)(y^2+xy+x^2-1)>0$

при $y-x<0$ необходимо доказать, что

$y^2+xy+x^2-1<0$, тогда неравенство выполняется

$0<x<\frac{1}{2}$ ; $\Rightarrow$ $0<x^2<\frac{1}{4}$

$0<y<\frac{1}{2}$ ; $\Rightarrow$ $0<y^2<\frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$0<xy<\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^2+y^2+xy<\frac{3}{4}$

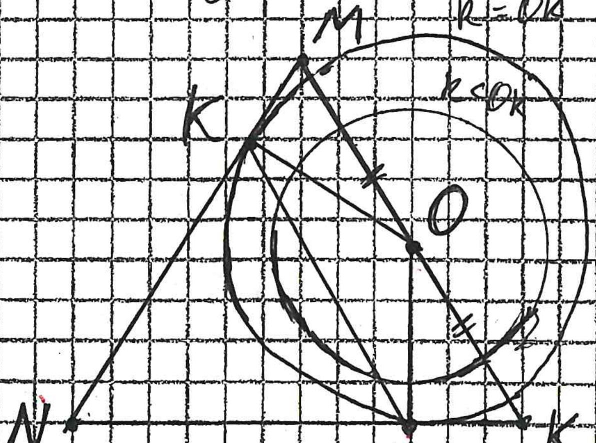
$x^2+y^2+xy-1<-\frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$x^2+y^2+xy-1<0$. ч.т.д.

+

Задание №5.




Рассмотрим окружность $\omega$ с увеличивающимся радиусом R и центром в точке O. O-середина MK.

Обозначим сторону треугольника MNK за „a".

Построим перпендикуляры $KO \perp NM$ и $OR \perp NK$;

~~Если радиус~~

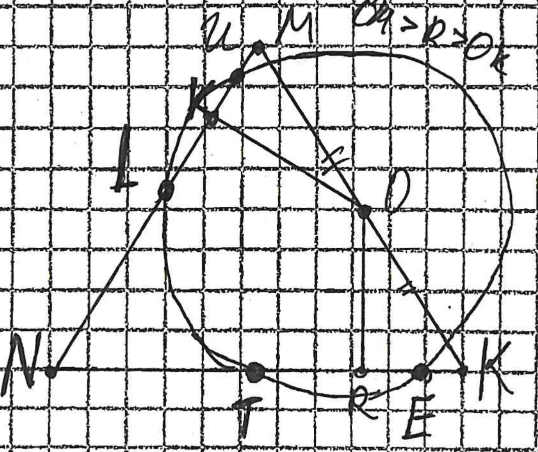
Продолжение на странице 5

Точки, в которых окружность ω пересекает прямые NM и NK могут быть P и Q.
Рассмотрим разные ~~[illegible]~~ значения радиуса и прямой KR.

1) Если радиус ~~[illegible]~~ по длине меньше чем OK, то окружность ~~вообще~~ не касается NM и NK => нет P и Q.
=> нет PQ.

2) Если радиус равен OK, то окружность касается сторон.
Тогда RK = KM => по обратной теореме Фалеса KR ∥ MK, т.е Q и P не могут быть K и P.
Рассмотрим KR: ~~$KR = \frac{3}{4}a$~~, т.к
$MK = \frac{1}{4}a$, т.к это перпендикуляр из середины стороны
тогда $\triangle NKR \sim \triangle NMK$, $\frac{NK}{NK} = \frac{3}{4}$ => $KR = \frac{3}{4}a$

3) Если радиус больше OK и меньше MO.



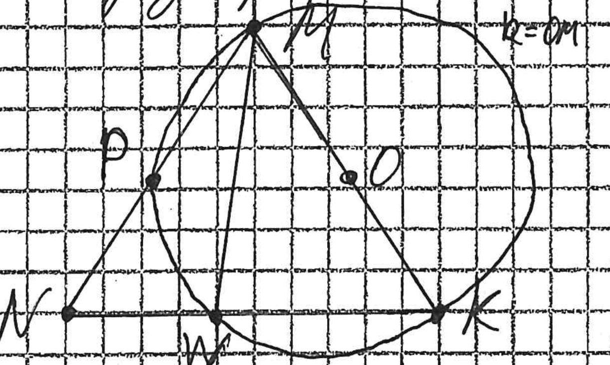

Окружность ω имеет с NM и NK 4 точки пересечения
LT и UE не могут быть прямой PQ, т.к они параллельны MK.
=> PQ это TU или LE.
TU = LE из симметрии.

Продолжение на стр. 6

Пусть PQ это TU.
Исходя из пункта 2: TU > KR, т.к TU не параллельна MK ⇒ её проекция на MK больше.

$PQ > \frac{3}{4}a.$

4) Радиус равен MO.




Окружность имеет 4 общих точки с MN и NK.
PW не может быть PQ, т.к они параллельны MK. MK может совпадать с PQ, ведь тогда это одна прямая и MK ~~не параллельна~~ с PQ, а совпадает.

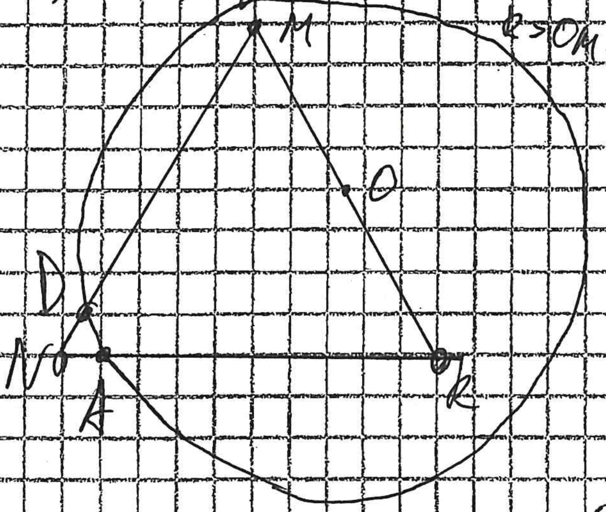
Т.е ($PQ = a$) возможно

WM и PK не параллельны.
Они могут быть PQ.
Пусть PQ это MW, тогда найдём MW.
$\angle MWK = 90°$, как вписанный и опирающийся на диаметр ⇒ $MW = \frac{\sqrt{3}a}{2}$;
Тогда $PQ \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$

5) Радиус больше чем OM.

(Продолжение на следующей странице 7)

5) Радиус больше OM.




Тогда окружность пересечет 2 точки с NM и NK.
$AD \parallel MK \Rightarrow AD \neq PQ$.

Можно сказать, что длина $PQ \in \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right] \cup \{a\}$ ?

Выразим „a" через площадь откуда

$S = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ ; $1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ ; $\Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Длина $PQ \in (1; 2] \cup \left\{\frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$

Ответ: Длина $PQ \in (1; 2] \cup \left\{\frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$

$\frac{1}{4}$

Задание №4

$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024\sin^{2025}(2x)$

Рассмотрим функцию $f(t) = t + t^{2023} + t^{2025} \cdot 2024$ при $|t| \leq 1$. Тогда $f(\cos(2x)) = f(\sin x)$ ок

Рассмотрим ее монотонность: $f'(t) = 1 + 2023t^{2022} + 2024 \cdot 2025t^{2024}$

Продолжение на следующей странице №8

$f'(t) = 1 + 2023\cdot 3t^{2022} + 2024\cdot 2025t^{2024} > 0\ \forall t.$

$f'(t) > 0 \Rightarrow f(t)\uparrow, \forall t.$

Если функция монотонно возрастает, то ~~одно~~ некоторое значение функция она принимает лишь один раз при некотором аргументе.

Если $f(\sin x) = f(\cos(2x))$, то равны и аргументы $\sin x = \cos 2x$;

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$; $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\}, \{\frac{\pi}{6} + 2\pi k\}, \{\frac{5\pi}{6} + 2\pi m\}, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$