

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
185	17.03.25	Генрихов	
Шифр			043587

1) Доказано:

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 & (10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2 = \\
 & = 10^2 + a^2 + (-b)^2 + 2 \cdot 10a + 2 \cdot (-b) \cdot 10 + 2a \cdot (-b) + \\
 & + 2^2 + b^2 + (-c)^2 + 2 \cdot 2b + 2 \cdot 2 \cdot (-c) + 2b \cdot (-c) + \\
 & + 3^2 + c^2 + (-a)^2 + 2 \cdot 3c + 2 \cdot 3 \cdot (-a) + 2c \cdot (-a) = \\
 & = 100 + a^2 + b^2 + 20a - 20b - 2ab + 4 + b^2 + c^2 + \\
 & + 4b - 4c - 2bc + 9 + c^2 + a^2 + 6c - 6a - 2ac = \\
 & = 113 + 2a^2 - 2ab + 2b^2 + 14a - 16b - 2ab + 2c^2 + \\
 & 2c - 2bc - 2ac
 \end{aligned}$$

Ответ: $113 + 2a^2 + 2b^2 + 14a - 16b - 2ab + 2c^2 + 2c - 2bc - 2ac$

2) Доказано:

$$a_1 = 25$$

$$a_{2025} = 625$$

Найти:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \hline
 1 & 7 & 4 & 5 & 1
 \end{array}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
		Шифр	043587

Решение:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_{2025} = a_1 + 2024d$$

$$625 = 25 + 2024d$$

$$600 = 2024d$$

$$d = \frac{600}{2024}$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_2 = 25 + \frac{600}{2024} = 25 + \frac{45}{253} = \frac{6325 + 45}{253} = \frac{6400}{253}$$

$$a_3 = 25 + 2 \cdot \frac{45}{253} = 25 + \frac{150}{253} = \frac{6325 + 150}{253} = \frac{6475}{253}$$

$$S_n = n \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n}$$

$$a_{n+1} - a_n$$

$$S_n = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d}$$

$$S_{2025} = \frac{\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}}{d} = \frac{\sqrt{625} - \sqrt{25}}{d} = \frac{20}{d}$$

$$d = \frac{45}{253}$$

$$S_{2025} = \frac{20}{\frac{45}{253}} = 20 \cdot \frac{253}{45} = \frac{5060}{45} = \frac{1012}{9}$$

$$S_{2025}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1012}{9}$$

70

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$4) \quad P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

По теореме Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = -4$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 0$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -1$$

$$S = \cancel{x_1^6 + x_2^6} = 50 \cdot 4 = 200$$

Симметрические суммы степеней:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) = (-1)^2 - 2 \cdot (-4) = 1 + 8 = 9$$

$$(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4)^2 - 2(x_1 x_2 x_3 x_4) = (-4)^2 - 2 \cdot (-1) = 16 + 2 = 18$$

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 9^2 - 36 = 81 - 36 = 45$$

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 = 8 \cdot 45 + 4 \cdot 18 =$$

$$= 405 + 72 = 477$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 8 \cdot (-1) + 4 = -8 + 4 = -4$$

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 45 \cdot (-1) + 20 = -45 + 20 = -25$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$S = 444 - 65 - 4 \cdot 45 + 8 + 1 + 200 = 444 - 65 - 180 + 8 - 1 + 200 = 440$$

Ответ: $P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 440$

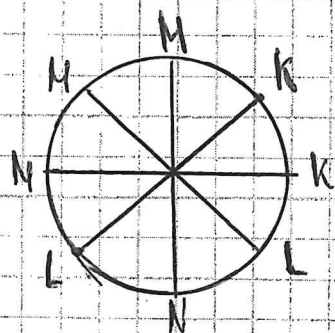
5) Дано:

$$S_{MNK} = 81$$

$$\angle LMN = 30^\circ$$

Найти:

$$MN + MK$$



Решение:

$$S_{\text{трапеции}} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$

Пусть $d_1 = MN + MK$ — вписанная
сумма дуг, тогда

d_2 — сумма дуг

$$81 = \frac{1}{2} (MN + MK) \cdot d_2 \cdot \sin 30^\circ$$

$$81 = \frac{1}{2} (MN + MK) \cdot d_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$81 = \frac{1}{4} (MN + MK) d_2$$

$d_2 \approx MN + MK$, тогда:

$$81 = \frac{1}{4} (MN + MK)^2$$

$$(MN + MK)^2 = \frac{81}{\frac{1}{4}}$$

$$(MN + MK)^2 = 324$$

$$MN + MK = 18$$

Ответ: $MN + MK = 18$

40

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

2) $f(x) = x^2 + ax + b \geq \frac{8}{10}$ - выполняется для
всех действ. x

$$f(x) \geq -\frac{1}{4}$$

$x = -\frac{a}{2}$ - вершина параболы

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b =$$

$$= -\frac{a^2}{4} + b$$

$$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{8}{10}$$

$$b \geq -\frac{8}{10} + \frac{a^2}{4}$$

$$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{8}{10}$$

$$\frac{a^2}{4} \geq -R$$

$$\frac{a^2}{4} \geq 0$$

$$\frac{13}{20} \geq 0$$

$$-\frac{a^2}{4} + b = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{8}{10} \geq -\frac{1}{4}$$

$$\frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{4} + \frac{8}{10}$$

$$\frac{a^2}{4} \geq \frac{-10 + 36}{40}$$

$$\frac{a^2}{4} \geq \frac{26}{40}$$

$$\frac{a^2}{4} \geq \frac{13}{20}$$

Ответ: $f(x) \geq -\frac{1}{4}$ - выполняется для всех
действительных x , т.к. $\frac{a^2}{4} \geq 0$

Крест. обоем.

50

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$\begin{array}{r} 600 \overline{) 8} \\ \underline{-56} \\ 40 \\ \underline{-40} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 253 \\ \hline 1265 \\ + 506 \\ \hline 6325 \end{array}$$

~~f(x)~~

$$x^2 + ax + b \geq -\frac{1}{4}$$

~~$$1002 \overline{) 1}$$~~

~~$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 6} \\ \underline{-18} \\ 22 \\ \underline{-18} \\ 44 \\ \underline{-42} \\ 2 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 2024 \overline{) 8} \\ \underline{-16} \\ 42 \\ \underline{-40} \\ 24 \\ \underline{-24} \\ 0 \end{array}$$

~~$$2024 \overline{) 1}$$~~

$$\begin{array}{r} 5060 \overline{) 5} \\ \underline{-5} \\ 006 \\ \underline{-5} \\ 10 \\ \underline{-10} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 253 \\ \hline 20 \\ 5060 \end{array}$$