

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
21	14.03	Хмидёва	

Шифр

01222

1	2	3	4	5	Σ
7	7	0	7	0	21

Задача 1

$$1) f(a, b, c) = (10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2$$

найдем частные производные

$$1) f'_a = 2(10 + a - b) + 2(3 + c - a)(-1) = 2(10 + a - b) - 2(3 + c - a) =$$

$$20 + 2a - 2b - 6 - c + a = 4a - 2b - 2c + 14$$

$$2) f'_b = 2(10 + a - b)(-1) + 2(2 + b - c) = -20 - 2a + 2b + 4 + 2b - 2c =$$

$$-2a + 4b - 2c - 16$$

$$3) f'_c = 2(2 + b - c)(-1) + 2(3 + c - a) = -4 - 2b + 2c + 6 + 2c - 2a =$$

$$-2a - 2b + 4c + 2$$

(2) Приведем к 0

$$1) 4a - 2b - 2c + 14 = 0 \quad / : 2$$

$$2a - b - c + 7 = 0$$

$$2) -2a + 4b - 2c - 16 = 0 \quad / : 2$$

$$-a + 2b - c - 8 = 0$$

$$3) 2a - 2b + 4c + 2 = 0 \quad / : 2$$

$$-a - b + 2c + 1 = 0$$

$$(3) (2a - b - c + 7) - (-a + 2b - c - 8) = 0$$

$$3a - 3b + 15 = 0$$

$$a - b + 5 = 0$$

$$a = b - 5$$

$$-(b - 5) - b + 2c + 1 = 0$$

$$-2b + 2c + 6 = 0$$

$$-b + c + 3 = 0$$

$$c = b - 3$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 4

$$2(b-5) - b - (b-3) + 7 = 0$$

$$2b - 10 - b - b + 3 + 7 = 0$$

$$0 = 0$$

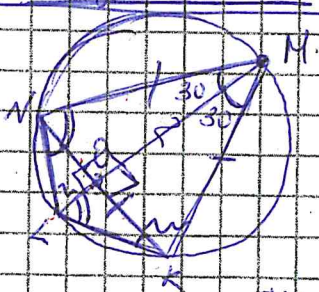
$$f(b) = (10 + (b-5) - b)^2 + (2 + b - (b-3))^2 + (3 + (b-3) - (b-5))^2$$

$$f(b) = 5^2 + 5^2 + 5^2$$

$$f(b) = 25 + 25 + 25 = 75$$

Ответ: ~~75~~ 75

Задача 5.



угол 30 градусов!

Дано:

M - вершина, через которую пров. окр.

NL - биссектриса $\angle MNK$

$\angle MNK = 81^\circ$; $\angle LMN = 30^\circ$

Найти: $MN + MK$ - ?

Решение:

т.к. $\angle LMN = 30^\circ$, а NL биссектриса $\angle MNK$ (по усл.) $\Rightarrow$
 $\angle NML = \angle LMK = 30^\circ$;

~~так~~ рассмотрим вершины N и K $\Rightarrow$

$\angle NML$ опирается на $\cup NL$; $\angle NKL$ опирается на $\cup NL \Rightarrow$
(по св-ву ~~окр~~ вписанных $\angle$) $\angle NML = \angle NKL \cong 30^\circ$;

$\angle LMK$ опирается на $\cup LK$; $\angle LNK$ опирается на $\cup LK \Rightarrow$
(по св-ву вписанных $\angle$) $\angle LNK = \angle LMK = 30^\circ$;

$\angle KMN$ опирается на $\cup KM$; $\angle MLK$ опирается на $\cup KM \Rightarrow$
(по св-ву вписанных $\angle$) $\angle MNK = \angle MLK$;

$\angle MKN$ опир. на $\cup NM$; $\angle MLN$ опир. на $\cup NM \Rightarrow$
(по св-ву ~~окр~~ вписанных $\angle$) $\angle MKN = \angle MLN \Rightarrow$

$\triangle NOL \sim \triangle ONK$ (по 2-м $\angle$) и $\triangle NOM \sim \triangle OKM$ (по 2-м $\angle$ рав-
ным $\angle$)

~~Все по теореме~~ в по св-вам вписанных $\angle$ в окр.

$MK + NL = NM + LK$; т.к. $\angle NML = \angle LMK = 30^\circ$ и опираются

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 5

на $\angle NL$ и $\angle K \Rightarrow \angle NL = \angle K = \text{по } 60^\circ$ (по св-ву вписанн $\angle$
 $\Rightarrow NL = LK$, обозначим за $z \Rightarrow$

$\angle + NM = MK + z \Rightarrow NM = MK \Rightarrow \triangle NMK$ равнобедренный
 $\Rightarrow$ по 2-м сторонам по 2-м равным сторонам и $\angle$ между ними; ($NM = MK$; OM - общий; $\angle NMO = \angle MKO$)

$\triangle NMO \cong \triangle MKO \Rightarrow \angle MNK = \angle MKN \Rightarrow$ (по сумме $\angle$ Δ)

$\frac{180 - 60}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle NMK$ равносторонний $\Rightarrow$

$$\cancel{S_{NMK} = S_{NMK} + S_{NMK}}$$

$\cancel{S_{NMK}}$ так $\angle NMO = 30^\circ$, а $\angle MNO = 60^\circ \Rightarrow$ (по сумме $\angle$ Δ)

$\angle MON = 180 - 60 - 30 = 90^\circ \Rightarrow$ так NK и ML - хорды $\Rightarrow$

$\angle NOM = \angle MOK = \angle NOL = \angle KOL = 90^\circ \Rightarrow$

если $\angle NMO = 30^\circ \Rightarrow$ (по св-ву $\angle 30^\circ$) $NO = \frac{1}{2} NM$;

обозначим $NO = x \Rightarrow NM = 2x \Rightarrow$ по теореме Пифагора

$$MO^2 = (2x)^2 - x^2 = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

$LO = \frac{1}{2} NL$ (по св-ву $\angle 30^\circ$); $LO = \frac{1}{2} LK$ (по св-ву $\angle 30^\circ$)

обозначим

если $\angle NKM = 60^\circ$, а $\angle KMN = 30^\circ \Rightarrow \triangle KMN$ - прямоугольный

$\Rightarrow$ (по св-ву $\angle 30^\circ$) $LK = \frac{1}{2} LM \Rightarrow$

$$2LO = \frac{1}{2} LM \Rightarrow LO = \frac{LM}{4} \Rightarrow$$

$$\cancel{LO/MO = 1/3}$$

$$\cancel{3LO = MO}$$

$$\cancel{LO = \frac{MO}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{3}}$$

Задача 5

$$S_{MNLK} = S_{MVK} + S_{NKK}$$

$$81 = \frac{NK \cdot MD}{2} + \frac{40 \cdot NK}{2}$$

$$162 = NK(MD + 40)$$

$$162 = NK(\sqrt{3}x + \sqrt{3}x)$$

$$162 = NK(2\sqrt{3}x)$$

$$162 = NK(4\sqrt{3}x)$$

$$NK = \frac{162 \cdot 3}{4\sqrt{3}x} = \frac{486}{4\sqrt{3}x}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$S_{MNLK} = S_{MVK} + S_{NKK}$$

$$S_{\triangle MNL} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot ML \cdot \sin(30^\circ)$$

$$S_{MNL} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot ML \cdot \frac{1}{2} = \frac{MN \cdot ML}{4}$$

$$S_{\triangle MLK} = \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MK \cdot \sin(90^\circ - 30^\circ)$$

Общая ns

$$S_{MNLK} = S_{MNL} + S_{MLK} = 81$$

$$\frac{MN \cdot ML}{4} + \frac{1}{2} \cdot ML \cdot MK \cdot \sin(90^\circ - 30^\circ) = 81$$

то есть S_{MNLK}

$$\frac{MN}{MK} = \frac{ML}{ML} = 1 \quad \begin{matrix} MN = x \\ MK = y \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{y} = \frac{ML}{ML} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} x \cdot ML + \frac{1}{2} ML y \cdot \sin(90^\circ - 30^\circ) = 81 \Rightarrow$$

Вероятно $x + y = MN + MK$

$$S_{MNLK} = 81$$

Пусть $ML = k \Rightarrow \frac{1}{4} x k + \frac{1}{2} y k \cdot \sin(90^\circ - 30^\circ) = 81$

Каждый член $MN + MK = 18$

Ответ: 18

08

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 4.

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

$$1) P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 50$$

Выразим $P(x)$ через $Q(x)$, если $Q(x) = 0$

$$\frac{x^6}{x^4} = x^2$$

$$x^2 Q(x) = x^6 - x^5 - 4x^4 + x$$

$$P(x) - (x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2) = -x + 50$$

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2) + (-x + 50)$$

$$P(x_1) = Q(x_1) \cdot (x_1)^2 + (-x_1 + 50)$$

$$\text{Если } Q(x_1) = 0, \text{ то}$$

$$P(x_1) = -x_1 + 50$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = (x_1 + 50) + (-x_2 + 50) + (-x_3 + 50) + (-x_4 + 50) = - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 200$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{Q_3}{Q_4} = -1$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -(-1) + 200 =$$

$$1 + 200 = 201$$

Ответ: 201



75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

Абсцисса вершины $x_v = -\frac{a}{2}$

$$\text{Ордината вершины} = y_v = -\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b =$$

$$-\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{3a^2}{4} + b$$

$$f(x) \geq -\frac{9}{10} \text{ для всех } x \text{ по уст.} \Rightarrow$$

или эк. ф-ция не меньше $-\frac{9}{10} \Rightarrow$

$$-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b \geq -\frac{9}{10}, \quad b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}$$

т.к. a и b — целые $\Rightarrow$

a^2 — четное число.

Рассмотрим a и b .

Если $a = 0$, то $b \geq \frac{9}{10} \checkmark \Rightarrow b \geq 1$ (т.к. b — целое число)

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + b \geq 0 \text{ (т.к. } b \geq 1 \text{ и } x^2 \geq 0) \Rightarrow f(x) \geq 1 \geq -\frac{1}{4}$$

Если $a = 1$, то $b \geq \frac{1}{4} - \frac{9}{10} = 5 - \frac{18}{20} = -\frac{13}{20} \Rightarrow b \geq 0$ (т.к. b — целое) $\checkmark$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + x + b \geq x^2 + x$$

Мин. значение $x^2 + x = -\frac{1}{4} \checkmark$

Если $a = 0$, то $b \geq -\frac{9}{10} \Rightarrow b \geq 0$ (т.к. b — целое) $\Rightarrow$

$$f(x) = x^2 + b \geq 0 \text{ (т.к. } b \geq 0 \text{ и } x^2 \geq 0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \geq -\frac{1}{4}$$

Если $a = 1$, то $b \geq \frac{1}{4} - \frac{9}{10} = 5 - \frac{18}{20} = -\frac{13}{20} \Rightarrow b \geq 0$

(т.к. b — целое $\Rightarrow f(x) = x^2 + b \geq x^2$)

Мин. эк. $x^2 + x = -\frac{1}{4}$ (при $x = -\frac{1}{2}$) $\Rightarrow f(x) \geq -\frac{1}{4}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2

Если $a = 2$, то $b \geq \frac{1}{4} - \frac{9}{10} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10} \Rightarrow$

$b \geq 1$ (так b — цел.) $\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x + b \geq x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 > -\frac{1}{4}$

Если $|a| \geq 3 \Rightarrow b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} \geq \frac{9}{4} - \frac{9}{10} =$

$\frac{(45-18)}{20} - \frac{27}{20} \geq 1 \Rightarrow$

$b \geq 2 \Rightarrow f(x) = x^2 + ax + b \geq \left(\frac{a^2}{4}\right) + 2 > -\frac{1}{4}$

так $\frac{a^2}{4} < \frac{9}{10} \leq b \Rightarrow$ Во всех случаях

$f(x) \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow$ для всех действительных x
выполняется $f(x) \geq -\frac{1}{4}$

75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Задача 3

т.к. $a_1 = 25 \Rightarrow$ ~~следующее~~ ~~большее~~ ~~на~~
а наименьшее $a_{2025} = 625 \Rightarrow$

числа a_i прибавляются не целые $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r} 600 \overline{) 25} \\ 50 \overline{) 24} \\ 100 \\ 100 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

~~через~~

$$\begin{array}{r} 2400 \overline{) 2025} \\ 2025 \overline{) 0,01} \\ \hline 375 \end{array}$$

какие-то a_i $\Rightarrow$
уменьш. a_i $\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{25} + \sqrt{25,01}} + \frac{1}{\sqrt{25,02} + \sqrt{25,03}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024} + \sqrt{625}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{625} + \sqrt{625}} = \frac{1}{2\sqrt{625}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2500}} = \frac{1}{50} = \frac{2}{100}$$

$$\Rightarrow = 0,02$$

Ответ: 0,02

!