Шифр 08094

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21	20.03	Коренкова Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
5	5	5	4	2	21

№4
$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x) = \sin x + \sin^{2023}x + 2024\sin^{2025}x \quad (1)$$

Введём $f(t) = t + t^{2023} + 2024\cdot t^{2025}$ и заметим, что $f(t)$ – возр. ф. пояснение -1

~~Это док-ем~~ вследствие того, что $f'(t) = 1 + 2023\cdot t^{2022} + 2024\cdot 2025\cdot t^{2024}$

и ~~f'(t)~~ $f'(t) > 0$,* т.к. $1 > 0$, $2023\cdot t^{2025} \geq 0$, $2024\cdot 2025\cdot t^{2024} \geq 0$

* при $t \in \mathbb{R}$.

пояснение.

Преобразуем (1): $f(\cos(2x)) = f(\sin x) \Rightarrow \cos 2x = \sin x$ (2) вследствие монотонн. $f(t)$. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

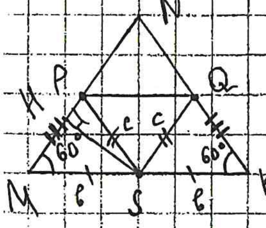
Преобразуем (2): $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + 1)(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1,\\ \sin x = \frac{1}{2}.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

+

№5 1) Докажем, что ~~[illegible]~~ обе точки не могут находиться на прямых MN (т. P) и NK (т. Q) так, что ~~[illegible]~~



т. S – середина MK => тогда $SM = SK = b$, $SP = SQ = c$.

Поскольку $\triangle MNK$ – равносторонн., то $\angle PMS = 60°$, $\angle QKS = 60°$.

По th cos в $\triangle PMS$: $SP^2 = SM^2 + PM^2 - 2\cdot SM\cdot PM\cdot\frac{1}{2}$ (1)

в $\triangle QKS$: $SQ^2 = SK^2 + QK^2 - 2SK\cdot QK\cdot\frac{1}{2}$ (2)

Преобразуем (1): $c^2 = b^2 + PM^2 - b\cdot PM$

(2): $c^2 = b^2 + QK^2 - b\cdot QK$ (3) ~~Рассмотрим многочлен $P(x) = x^2 - bx + b^2 - c^2$~~

~~Контролируем, что если $P(x)$ имеет корень по только одни из ...~~
~~один корень ... покажем только один, ..., что эти 2 корня совпад.~~

место для скобы

Шифр 08094

№5

~~1) Делаем вывод, что PM = QK, т.к. PM ≥ 0, QK ≥ 0 (т.P ≠ т.M, т.Q ≠ т.K)~~

~~След., по обратн. Т. Фалеса PQ ∥ MK (т.к. PM = QK) ⇒ противореч. усл.~~

~~2) След., одна из точек (т.P или т.Q) должна совпад. с точкой основания MK или одна из точек лежит на своей стороне и не совп.~~

~~или обе точки (т.P и т.Q) должны совпадать с т.N, и в этом случае PQ = 0 (когда т.P = т.Q = т.N)~~

~~(*) При этом одновременно не может что т.P совпад. с т.M и т.Q совпад. с т.K, ведь в этом случае PQ = MK, из чего следует, что PQ ∥ MK ⇒ противореч. усл.~~

~~3) (*) $P(x) = x^2 - bx + b^2 - c^2$ $x = \frac{b \pm \sqrt{4c^2 - 3b^2}}{2}$~~

~~Если $4b > b + \sqrt{4c^2 - 3b^2} \geq 0$, ...~~

~~т.к. $b \geq 0$~~

~~Если b ...~~

~~Если $P(x) = x^2 - bx + b^2 - c^2$ $x = \frac{b \pm \sqrt{4c^2 - 3b^2}}{2}$~~

~~Если $b^2 - c^2 ...$~~

№8 По усл. $0<x<\frac{1}{2}$, $0<y<\frac{1}{2}$, $y^2-x^2>y-x$ (1); $y^3-x^3 \vee y-x$ (2)

Преобраз. (1): $y^2-y>x^2-x$

Введём $f(t)=t^2-t$ $f'(t)=2t-1$

Поскольку $f(t)$ – убыв. ф., при $t\in(0;\frac{1}{2})$ (*) и $f(y)>f(x)$ (из (1)),

то $\boxed{y<x}$ (*) и $0<x<\frac{1}{2}$, $0<y<\frac{1}{2}$

Преобраз (2): $y^3-y \vee x^3-x$

Введём $g(t)=t^3-t$ $g'(t)=3t^2-1=(\sqrt{3}t+1)(\sqrt{3}t-1)$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{2}$, т.к. $2=\sqrt{4}>\sqrt{3}$, $g(t)$ – убыв. ф., при $t\in(0;\frac{1}{2})$,

$0<x<\frac{1}{2}$, $0<y<\frac{1}{2}$, ~~и~~ $\boxed{y<x}$, то $g(y)>g(x)$

След., $y^3-y>x^3-x \iff \boxed{y^3-x^3>y-x}$

Ответ: ч.т.д.

№1

$n = \overline{abcd}$, где $a \in \mathbb{N}$, ~~b~~ $b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b, c, d \geq 0$, $a, b, c, d < 10$

Обозначим за $m = a+b+c+d$, где $m \in [1; 36]$

При этом для каждого m существует некоторое кол-во чисел, но, чтобы

$p = \frac{n}{m}$ было ~~было~~ минимальным, нужно, чтобы n было минимальным

для опред. знач. m (если $m \in [1; 28]$, то $n = \overline{1bcd}$, где $0 \leq b \leq c \leq d \leq 9$,

если $m \in [29; 36]$, то $n = \overline{a999}$ ~~...~~, где $1 < a < 10$.)

Переберём все $p = \frac{n}{m}$, где n минимальное для опред. знач. m.

$\frac{9999}{36} = 277\frac{3}{4}$; $\frac{8999}{35} = 257\frac{4}{35}$; $\frac{7999}{34} = 235\frac{9}{34}$; $\frac{6999}{33} = 212\frac{1}{11}$; $\frac{5999}{32} = 187\frac{15}{32}$

$\frac{4999}{31} = 161\frac{8}{31}$; $\frac{3999}{30} = 133\frac{3}{10}$; $\frac{2999}{29} = 103\frac{12}{29}$; $\frac{1999}{28} = 71\frac{11}{28}$; $\frac{1899}{27} = 69\frac{1}{3}$;

$\frac{1799}{26} = 69\frac{5}{26}$; $\frac{1699}{25} = 67\frac{24}{25}$; $\frac{1599}{24} = 66\frac{15}{24}$; $\frac{1499}{23} = 65\frac{4}{23}$; $\frac{1399}{22} = 63\frac{13}{22}$

$\frac{1299}{21} = 61\frac{6}{7}$; $\frac{1199}{20} = 59\frac{19}{20}$; $\frac{1099}{19} = 57\frac{16}{19}$; $\frac{1089}{18} = 60\frac{1}{2}$; $\frac{1079}{17} = 63\frac{8}{17}$

$\frac{1069}{16} = 66\frac{13}{16}$; $\frac{1059}{15} = 70\frac{3}{5}$; $\frac{1049}{14} = 74\frac{13}{14}$; $\frac{1039}{13} = 79\frac{12}{13}$; $\frac{1029}{12} = 85\frac{3}{4}$

$\frac{1019}{11} = 92\frac{7}{11}$; $\frac{1009}{10} = 100\frac{9}{10}$; $\frac{1008}{9} = 112$; $\frac{1007}{8} = 125\frac{7}{8}$; $\frac{1006}{7} = 143\frac{5}{7}$

$\frac{1005}{6} = 167\frac{1}{2}$; $\frac{1004}{5} = 200\frac{4}{5}$; $\frac{1003}{4} = 250\frac{3}{4}$; $\frac{1002}{3} = 334$; $\frac{1001}{2} = 500\frac{1}{2}$, $\frac{1000}{1} = 1000$

Очевидно, что $\frac{1099}{19}$ явл. искомым отнош., где $\frac{n}{m}$ минимально

Ответ: 1099.

Место для скобы

Шифр 08094

№3

$2024 \equiv_{17} 1 \qquad 2024 \equiv_{101} 4 \qquad \cancel{P(17) \equiv_{17} a_0} \qquad \cancel{P(101)}$

Учитывая, что $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i + a_0$, $P(17) = P(101) = 2024$,

получаем, что $\boxed{a_0 \equiv_{17} 1}$, $\boxed{a_0 \equiv_{101} 4}$

Тогда $\begin{cases} a_0 = 17k + 1 \\ a_0 = 101m + 4 = (6\cdot 17 - 1)m + 4 = 17\cdot(6m) + (4-m) \\ |a_0| < 999 \end{cases}$ $k, m \in \mathbb{Z}$

обоснуйте? неверное

След., $4 - m = -17n + 1$? $\Rightarrow m = +17n + 3$, $n \in \mathbb{Z}$

$a_0 = 101(17n + 3) + 4 = 1717n + 307.$

Учитывая, что $|a_0| < 999$, получаем, что $n = 0$ и $\boxed{a_0 = 307}$

Ответ: 307.

X

№5 1) Преобразуем (3): $c^2 = \left(PM - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$

$c^2 = \left(QK - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$

При этом если $c\uparrow$, то и $PM\uparrow$ и $QK\uparrow$, если $c\downarrow$, то $PM\downarrow$, $QK\downarrow$

Значит, $PM = QK$

След., по обратн. т. Фалеса $PQ \parallel MK$ (т.к. $PM = QK$) $\Rightarrow$ противореч. усл.

~~2) След.~~

~~Опустим SH на грань. SH на одну из сторон (MN или MK)~~

~~Без потери общ., опустим ее именно на MN. Тогда~~ $\cancel{SH = \frac{\sqrt{3}b}{2}}$

2) Поскольку т.P. и т.Q. не могут одновременно лежать на доп. от.

~~При этом они не могут лежать одноврем.~~, пусть одна из ~~этих~~ точек совпад. с точкой оси, а другая лежит на доп. от. и не совпад. с точк. оси, иначе $PQ = MK \Rightarrow PQ \parallel MK \Rightarrow$ противореч. усл.

Место для скобы

Шифр

№5 2) При этом, если т. P = т. Q = т. N ~~то $PQ \cap MNK = \varnothing$ противоречие.~~ то $PQ = 0$, но всё-таки ~~PQ~~ $\nparallel MNK$. Мы не можем сказать, что PQ не пересек. MK

3) ~~Рассмотрим.~~ ~~Докаж.~~ Без потери общ. т. Q = т. K.

т. $P \in MN$, т. $P \neq$ т. M. Тогда $SQ = SP = b$

ΔMPS равнобедр. ($MS = PS$) и угол у осн. равен $60^\circ \Rightarrow \Delta MPS$ – равносторонн. $\Rightarrow \angle PSM = 60^\circ \Rightarrow \angle PSK = 120^\circ$.

Тогда по Th cos в PSK: $PK = \sqrt{PS^2 + SK^2 - 2 PS \cdot SK \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = b\sqrt{3}$.

4) $S_{MNK} = \frac{\sqrt{3}(2b)^2}{4} = \sqrt{3}b^2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

След., PK (из 3 ~~его~~ пункта) $= \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{3}$

$\boxed{PQ = \sqrt[4]{3}}$

Ответ: PQ равно только $\sqrt[4]{3}$, если т. P и т. Q принадлежат ΔMNK

и если мы не можем сказать, что при т. P = т. Q = т. N, PQ не пересек. MK.