

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
25	21.03	Короманов Е.Е.	М

N1

$$\frac{abcd}{a+b+c+d} = \frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d} = (1) + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d} \Rightarrow$$

из этого можно понять, что для получения минимального значения $a=1$, $d=9$. Методом подбора можно доказать, что $\frac{1099}{1+0+9+9} \approx 57,84$ является минимальным отношением.

Ответ: 1099

X

$$\begin{array}{r|rrrr|rr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ \hline 4 & 7 & 7 & 7 & 0 & 25 \end{array}$$

N2. Доко: 1) $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$

$$2) y^2 - x^2 > y - x$$

$$\text{Доказ-ть: } y^3 - x^3 > y - x$$

$$y^2 - x^2 > (y - x)$$

$$0 < 0 < x + y < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$(y-x)(y+x) - (y-x) > 0$$

$$\Rightarrow 0 < x+y < 1$$

$$(y-x)(y+x-1) > 0$$

$$0 < 1 < x+y-1 < 0$$

$$< 0 \Rightarrow$$

$$x+y-1 < 0$$

$$\Rightarrow y-x < 0 \text{ (чтобы утв. было верно)}$$

$$y^3 - x^3 > y - x$$

$$\text{т.к. } y-x < 0, \text{ то } (y^2+xy+x^2) < 0$$

$$y^2+xy+x^2 < 1$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2) - (y-x) > 0$$

$$\frac{1}{4} > y^2 > 0, \frac{1}{4} > x^2 > 0, \Rightarrow y^2+x^2 > xy$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2-1) > 0$$

$$\frac{1}{4} > xy > 0. \text{ Если } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1, \text{ то}$$

$$y^2+xy+x^2 < 1 \text{ т.к. значения } x^2, y^2, xy < \frac{1}{4}$$

Следовательно из этого

$$(y^2 + xy + x^2 - 1) < 0 \Rightarrow (y-x)(y^2 + xy + x^2 - 1) > 0$$

Ч. т. д.

+

№3. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

1) $P(17) = P(101) = 2024$

2) $|a_0| < 999$

Возьмем $P(17)$ и вынесем 17

$$17 \left(\frac{a_n 17^n}{17} + \frac{a_{n-1} 17^{n-1}}{17} + \dots + a_1 \right) + a_0 = 2024$$

Возьмем значение в скобках за b

$17b = 2024 - a_0$, по условию $P(101) = P(17)$, возьмем

$P(101)$ и значение в скобках за c

$101c = 2024 - a_0 \Rightarrow 17b = 101c$ так $\frac{101}{17}$ - не целое число

$\Rightarrow \frac{b}{101}$ - натуральное, возьмем $b = 101$

$17 \cdot 101 = 2024 - a_0$

$a_0 = +307$; $|307| < 999$ - ур. усл.

Возьмем $202 = b$

$17 \cdot 202 = 2024 - a_0$

$a_0 = -1410$ так $|1410| > 999$ - не ур. усл. $\Rightarrow b > 101$

не ур. усл. $\Rightarrow$ единственное значение $a_0 = 307$

Ответ: 307

+

N 4

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2024}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2024}(x)$$

$$\cos(2x) = a \quad \sin x = b$$

$$a + a^{2023} + 2024 \cdot a^{2024} = b + b^{2023} + 2024 \cdot b^{2024}$$

$$\text{Возьмем } f(a) = a + a^{2023} + 2024 \cdot a^{2024}$$

$$f(a) = 1 + 2023a^{2022} + 2024 \cdot 2025a^{2023} > 0$$

$$f(b) = 1 + 2023b^{2022} + 2024 \cdot 2025b^{2023} > 0$$

оба функции возрастают, значит будут равны только в 1 точке. $\Rightarrow$

$$f(a) = f(b), \quad f(\cos 2x) = f(\sin x) \Rightarrow$$

$$\cos 2x = \sin x$$

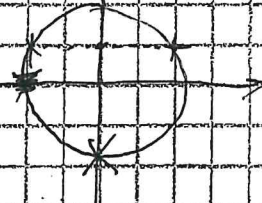
$$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \sin x = t \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Найдем значения на числовой окружности



$$x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

X