

х и у положительные

$$1) x > y > 0$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

$$k = \frac{x}{y} \quad k > 1 (x > y)$$

$$x = ky$$

$$(ky)^2 + y^2 = \frac{10}{3}(ky \cdot y)$$

$$k^2 y^2 + y^2 = \frac{10}{3}ky^2 \quad / : y^2$$

$$k^2 + 1 = \frac{10}{3}k \quad / \cdot 3$$

$$3k^2 + 3 = 10k$$

$$3k^2 - 10k + 3 = 0$$

$$D = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 (8)$$

$$k_1 = \frac{10 + 8}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3 \quad k > 1$$

$$k_2 = \frac{10 - 8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$k \leq 3$$

$$\downarrow$$

$$x = 3y$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2$$

$$\text{Ответ: } 2$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 2 \\ 7 \ 2 \ 4 \ 4 \ 0 \ 12 \\ \hline \end{array}$$

$$2) a \geq 1 \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

$$b \geq 2 \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \quad \text{т.к. } 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$c \geq 3 \quad c^2 = 21 - 1^2 - 2^2 = 16 \quad c = 4$$

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 4$$

мин. значение
a, b, c

$$a + b + c \geq 7$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

Ответ: $a + b + c$ при $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$
и при $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$, всегда ≥ 7

$$3) A_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}$$

$$\text{преобразуем } 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4}$$

$$n^4 + 2n^3 - 2n^2 - 1 = (n-1)(n+1)^3$$

$$A_n = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}$$

$$\prod_{n=2}^{99} A_n = \prod_{n=2}^{99} \left(\frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3} \right) =$$

$$= \prod_{n=2}^{99} \frac{n-1}{n} \cdot \prod_{n=2}^{99} \frac{(n+1)^3}{n^3}$$

$$\prod_{n=2}^{99} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \dots \cdot \frac{98}{99} = \frac{1}{99}$$

$$\prod_{n=2}^{99} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(\prod_{n=2}^{99} \frac{n+1}{n} \right)^3 = \left(\frac{100}{2} \right)^3 = 50^3 = 125000$$

$$\frac{1}{99} \cdot 125000 = \frac{125000}{99}$$

$$\text{Ответ: } \frac{125000}{99}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

042354

$$4) x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$x^2 + px = -\frac{1}{2p^2}$$

↓

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-p)^2 - 2\left(-\frac{1}{2p^2}\right) = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2$$

$$\left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4}$$

$$2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4p^4} = \frac{1}{2p^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4} = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$

$$p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} \quad ? \text{ не верно,}$$

$$p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq 2 - \sqrt{\frac{p^4}{2p^4}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$$

$$p^4 \geq \frac{1}{2p^4} \quad ? \text{ не верно?}$$

$$p^8 \geq \frac{1}{2} \quad p^4 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

↓

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + \frac{1}{2p^4} + 2 \geq \sqrt{2} + 2$$

Ответ: $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ при любом значении $p \neq 0$

5) Утверждение верно т.к. благодаря свойствам вписанного четырехугольника и равнобедренного треугольников $\triangle DAP$ и $\triangle BCP$, точка пересечения BD и PC является серединой PQ