

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
155	20.03.25	Гессерина	Ан
Шифр			918451

1/2/3/4/5
2/7/6/0/0

N3

$$x^2 - 6\sqrt{x^2 + 1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0 \quad (*)$$

П.к. $\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18}$ принимает значения от -1 до 1,
найдем x , при которых он равен данным значениям:

$$\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = -1$$

$$\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 18\pi + 36\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

При решении данного уравнения получили x , содержа-
щий π , что при подстановке в $(*)$ не делает равенст-
во верным.

$$\cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 1$$

$$\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Пусть $k = 0$, чтобы убрать π тогда.

$$\frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

$$x^2 + \sqrt{2}x - 4 \geq 0$$

$$\sqrt{2}x = 4 - x^2$$

$$2x^2 = 16 - 8x^2 + 8x^4$$

$$t = x^2$$

$$8t^2 - 8t - 2t + 16 \geq 0$$

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0$$

60

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			918451

№3 (продолжение)

По т. Виета:

$$\begin{cases} x^2 = 8 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 8; x = \pm\sqrt{8} \\ x^2 = 2; x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Подставим найденные x в (*) и проверим равенство:

$$1) x = \sqrt{2}: 2 - 6\sqrt{3} + 11 - \cos \frac{2+2-4}{18} = 0$$

$$13 - 6\sqrt{3} - \cos 0 = 0$$

$$13 - 6\sqrt{3} - 1 = 0 \quad \text{✗}$$

$$2) x = -\sqrt{2}: 2 - 6\sqrt{3} + 11 - \cos \frac{2-2-4}{18} = 0 \quad \text{✗}$$

$$3) x = \sqrt{8}: 8 - 18 + 11 - \cos \frac{8+4-4}{18} = 0 \quad \text{✗}$$

$$4) x = -\sqrt{8}: 8 - 18 + 11 - \cos \frac{8-4-4}{18} = 0$$

$$1 - \cos 0 = 0$$

$$1 - 1 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow \underline{x = -\sqrt{8}}$$

Ответ: $x = -\sqrt{8}$

№7

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 \quad (*)$$

П.к. квадрат числа неотрицательный $\Rightarrow (*) \geq 0$

Проверим, может ли $(*) = 0$:

$$(7+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2 = 0$$

25

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№1 (продолжение)

Данное равенство возможно только когда все слагаемые равны 0:

$$\begin{cases} 7 + a - b = 0 & (1) \\ 2 + b - c = 0 & (2) \\ a + c - a = 0 & (3) \end{cases}$$

Из (3): $a = c + 9 \rightarrow (1) \Rightarrow 7 + c + 9 - b = 0$

$16 + c - b = 0 \Rightarrow b = c + 16 \rightarrow (2) \Rightarrow 2 + c + 16 - c = 0$

$18 = 0 \quad \nexists$

Значит $(*) > 0 \Rightarrow$ Выражение ~~принимает~~^{имеет} своё минимальное значение только при $a = b = c$. В противном случае оно будет больше:

$$(7 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (a + c - a)^2 = 7^2 + 2^2 + 9^2 = 49 + 4 + 81 = 134$$

Ответ: 134

№2

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506 = x^2(x^4 + x^3 - 4x^2 + 1) - x + 506 = x^2 \cdot Q(x) - x + 506$$

П.к. x_1, x_2, x_3, x_4 — корни $Q(x)$, то $Q(x_1) = Q(x_2) = Q(x_3) = Q(x_4) = 0$. $\Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = x_1^2 \cdot Q(x_1) - x_1 + 506 + x_2^2 \cdot Q(x_2) - x_2 + 506 + x_3^2 \cdot Q(x_3) - x_3 + 506 + x_4^2 \cdot Q(x_4) - x_4 + 506 = 2024 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$. (1)

Многочлен $Q(x)$ имеет вид $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, где сумма его корней $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -b$

70



Открытая региональная
межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№2 (продолжение)

Значит для $Q(x)$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$

Подставим в (1): $2024 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 2024 + 1 = 2025$

Ответ: 2025

