Шифр 920734

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16		И. Ю. Гендерена	

3. Сначала упростим:

$$a_n = \frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4} = \frac{n^4-1+2n^3-2n}{n^4} = \frac{(n^2+1)(n^2-1)+2n(n^2-1)}{n^4} = \frac{(n^2+2n+1)(n^2-1)}{n^4} = \frac{(n+1)^2\cdot(n+1)(n-1)}{n^4} =$$

$$= \frac{(n+1)^3\cdot(n-1)}{n^4}$$

Так как возводится в степень $(n+1)^4$, ~~то~~ в a_{n+1} в знаменателе будет $(n+1)^4$. Т.е.:

$$a_{n-1} = \frac{n^3\cdot(n-2)}{(n-1)^4},\quad a_n = \frac{(n+1)^3\cdot(n-1)}{n^4},\quad a_{n+1} = \frac{(n+2)^3\cdot n}{(n+1)^4}$$

Теперь перемножим и посмотрим, что сокращается:

$$\frac{n^3\cdot(n-2)\cdot(n+1)^3\cdot(n-1)\cdot(n+2)^3\cdot n}{(n-1)^4\cdot n^4\cdot(n+1)^4} = \frac{(n-2)\cdot(n+2)^3}{(n-1)^3\cdot(n+1)}$$

Как видно члены последовательности между первым и последним сокращаются. В нашем случае останутся только $\frac{1\cdot 100^3}{2^3\cdot 99} =$

$$= \frac{50^3}{99}$$

Ответ: $\frac{50^3}{99} = \frac{125000}{99}$

7 б.

Шифр 920784

2. Рассмотрим случай, при котором значения a, b, c минимальны, т.е. $a^2+b^2+c^2=21 \Rightarrow a+b+c=7$. Разложим 21 на квадраты чисел $21=1+4+16$, т.е. $\sqrt{1}+\sqrt{4}+\sqrt{16}=7$. И это так. Так как в действительные числа попадают корни. То будем их использовать и попытаемся доказать обратное.

Допустим $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{12}$. Их сумма в квадрате даст 21, но $\sqrt{3}\approx1,6$, $\sqrt{12}\approx3,5$. Это означает, что они нам не подходят и если мы будем уменьшать значение одного корня, то другой корень будет увеличиваться. Теперь попробуем сделать с близким к 4. Это самый выгодный вариант так как если сравнить $2^2-1^2=3$, $3^2-2^2=5$, $4^2-3^2=7$ то увеличивая c на 1 достигается самая большая разница квадратов. Таким образом $a=1$, $b=2$, $c=\sqrt{15{,}999\ldots}$. Теперь сложим квадраты.

$$1^2+2^2+\sqrt{15{,}999}^2=1+4+15{,}99\ldots=20{,}999\ldots$$

Получается ~~[illegible]~~ достигнуть 21 невозможно, если $a+b+c<7$.

2 б. Недостаточное обоснование

1.
$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$$

$$x^2+y^2=xy\cdot\frac{10}{3}\quad\Big|:\frac{10}{3}$$

$$\frac{3x^2}{10}+\frac{3y^2}{10}=xy\quad\Big|\cdot 2$$

$$\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{5}y^2=2xy$$

Сделаем замену:

$$\frac{\frac{5}{5}x^2+\frac{3}{5}x^2+\frac{3}{5}y^2+\frac{5}{5}y^2}{\frac{5}{5}x^2-\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{5}y^2+\frac{5}{5}y^2}=\frac{\frac{8}{5}x^2+\frac{8}{5}y^2}{\frac{2}{5}x^2+\frac{2}{5}y^2}=\frac{\frac{8}{5}(x^2+y^2)}{\frac{2}{5}(x^2+y^2)}=\frac{4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}=4$$

$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=4$. Значит $\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{4}=2$. Ответ: 2, так как $x>y \Rightarrow \frac{x+y}{x-y}>0$, поэтому -2 не может быть. 7 б.