

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
16		Корсаков	М
Шифр			042039

№1

$$1) x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

$$2) \text{ Выразим } x^2 + y^2 \text{ через } (x+y)^2 \text{ и } (x-y)^2:$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

$$3) (x+y)^2 - 2xy = \frac{10}{3} xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{10}{3} xy + 2xy = \frac{16}{3} xy$$

$$4) \text{ Выразим } (x-y)^2$$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = \frac{16}{3} xy - 4xy = \frac{4}{3} xy$$

$$5) \text{ Найдем отношение } \frac{x+y}{x-y}$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{16}{3} xy}{\frac{4}{3} xy} = 4$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2

Дано: x и y - положительные числа

$$x > y; x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

Найти:

$$\frac{x+y}{x-y}$$

1	2	3	4	5	2
7	2	1	6	0	16

№2

Доказательство:

1) Мин значения переменных:

при $a=1, b=2, c=3$ сумма квадратов

$$\text{равна: } 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 < 21 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ хотя 1 переменная должна быть больше

всего мин значение

Дано:

$$a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

Док-ть:

$$a+b+c \geq 7$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№2

2) Увеличим c : Пусть $c = 3+t$, $t \geq 0 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + (3+t)^2 = 14 + 6t + t^2 \geq 21 \Rightarrow$
 $\Rightarrow t^2 + 6t \geq 7$

Решая $t^2 + 6t - 7 = 0$, находим t ? *уже есть.*

1. Тогда $c = 4$ и $a+b+c = 1+2+4 = 7$

Ели увеличу a или b , то аналогично показывается, что $a+b+c > 7$

3) $\min \sum a+b+c = 7$ достигается при $a=1, b=2, c=4$, что
 удовлетворяет условию $a^2+b^2+c^2=21$

Вывод: при заданных условиях $a+b+c \geq 7$

что и требовалось доказать (ч.м.г.)

№3

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

Дано:

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

Найти:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99}$$

$$1) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\right)$$

$$2) a_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^3+n^2-1}{n^3}$$

3) Запишем произведение $a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99}$

$$\prod_{n=2}^{99} a_n = \prod_{n=2}^{99} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n^3+n^2-1}{n^3} \right)$$

$$4) \prod_{n=2}^{99} \frac{n+1}{n} \cdot \prod_{n=2}^{99} \frac{n^3+n^2-1}{n^3}$$

$$5) \prod_{n=2}^{99} \frac{n+1}{n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$$

$$6) \prod_{n=2}^{99} \frac{n^3+n^2-1}{n^3} = \prod_{n=2}^{99} \left(1 + \frac{n^2-1}{n^3} \right) \quad 7) \prod_{n=2}^{99} a_n = 50 \cdot \prod_{n=2}^{99} \frac{n^3+n^2-1}{n^3}$$

Ответ: $\frac{125000}{99}$

ошибка?

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
		Шифр	

№ 4

Дано:

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$$

1) Используя т. Виета

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

2) Выразим: $x_1^4 + x_2^4$:

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

3) Выразим $x_1^2 + x_2^2$:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

4) Подставим выражение для $x_1^4 + x_2^4$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2p^2}\right)^2 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4}$$

$$5) x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \quad \checkmark$$

6) Докажем неравенство $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$ Рассмотрю $f(p) = p^4 + \frac{1}{2p^4}$

Найдем минимум функции, приравняв производную к нулю:

$$f'(p) = 4p^3 - \frac{2}{p^5} = 0 \Rightarrow 4p^3 = \frac{2}{p^5} \Rightarrow 4p^8 = 2 \Rightarrow p^8 = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$$

Подставлю $p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$ в $f(p)$:

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$$

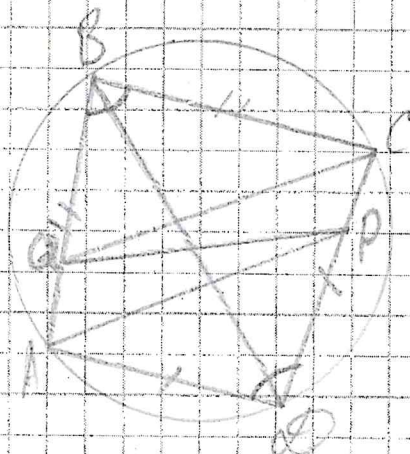
$$7) x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} + 2$$

Вывод: Для корней x_1, x_2 многочлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ и л.в. ненулевого значения p выполняется неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$

7. м. г.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№5



Дано:

$ABCD$ - ч.х. у.к.; $ABCD$ - вписан в окр

$$DP = AP; BQ = QC$$

BD делит PQ пополам - ?

Решение:

1) Т.к. ч.х. у.к. $ABCD$ - вписан в окр., то $\angle B + \angle D = 180^\circ$ и $\angle C + \angle A = 180^\circ$

2) Т.к. $DP = AP$ и $BQ = QC \Rightarrow \triangle DAP \cong \triangle CBQ$?

3) $BD \cap PQ = T$

4) $QT = PT$, т.к. т. P и т. Q расположены на прямой, параллельной соответствующим сторонам. ?

т.т.д.