

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
135	18.03.25	Телюрина	16
Шифр			043120

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 7 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

№2

Дано: $a > 1, b > 2, c > 3, a^2 + b^2 + c^2 > 21, a + b + c > 7$ -?

Док-ть: $a + b + c > 7$

Доказ: Мы можем проверить метод от противного и взять самые минимальные числа $a=1, b=2, c=3 \Rightarrow$ сумма будет 6, что не подходит нашему условию, тогда можно сделать еще вывод: что также отрицательные числа нам не подойдут т.к нам нужно чтобы было $> 7 \Rightarrow$ не целые числа тоже могут не выполнять наше условие из-за того, что сумма может быть настолько маленькой, что она тоже не выполнит наше условие к примеру 1,0000001, тогда сумма будет только целые числа и чтобы хотя 1 число было не равно самому минимальному значению. Тогда у нас будет выполнено условие, пример: $a=2, b=2, c=3 \Rightarrow 7 > 7$, тогда уже подойдет наше условие $\Rightarrow$ чтобы всё доказалось нужно чтобы числа были целые, 2) чтобы хотя одно число не было равно своему минимальному значению.

№3

Дано: $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$

Найти: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{99}$

Решение: т.к мы знаем закономерность, то всего 98 чисел тогда т.к почти везде минус, то 97 из них отрицательные числа $\Rightarrow$ мы можем к сумме $\frac{2}{n}$ подставить а затем самым будет 1 см. продолжение на следующей.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

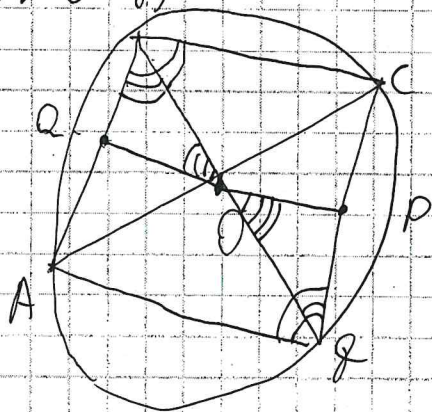
Шифр

042120

и так будет со всеми числами $\Rightarrow 2 + (-9) = -95 \Rightarrow$

значение выражения -95 ответ: -95

№5



Дано: рисунок есть как-то геометрически.
 $AB \parallel CQ$, $BQ = BC$, $QA = RP$

Возьмем ли BQ другим отрезком
на PQ пополам?

Решение: Т.к. $Q B = B C$ и $A Q = R P$
(по условию) $\Rightarrow \angle A B Q = \angle B Q C$ (накрест.
лежащие), $\angle C B Q = \angle A Q B$ (накрест.
лежащие) $\Rightarrow \angle A P C = \angle A B C$ как

при равных углах т.к. $\angle A P C = \angle A Q B + \angle B Q C$, $\angle A B C = \angle A B Q + \angle Q B C \Rightarrow$

$\angle Q O B = \angle R O B$ (как вертикальные) $\Rightarrow$ точка Q и точка P

совпадают $\Rightarrow Q P$ или же $P Q$ делится пополам при
диagonalю BQ .

№1

$$x > y \mid \frac{x+y}{x-y} = ? \quad x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

$$x^2 + y^2 - \frac{10}{3}xy = 0 \Rightarrow t = xy$$

$$\frac{x^2 y^2}{xy} - \frac{10}{3}xy = 0$$

$$x^2 y^2 - \frac{10}{3}xy = 0$$

$$t^2 + 3t - 10 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 + 40$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 \pm 7}{2} = -5 \text{ и } 2 \Rightarrow$$

но $\Rightarrow$ ответ: 2



Открытая региональная
межвузовская олимпиада



Национальный
исследовательский
Томский
государственный
университет

Шифр

049106

1.	Предмет	Математика																			
2.	Вариант	1																			
3.	Класс	9																			
4.	Фамилия	Р	О	Г	И	К	О	В	А												
	Имя	С	О	Ф	Ь	Я															
	Отчество	Д	Е	Н	И	С	О	В	Н	А											
5.	Дата рождения	1	4					1	0					2	0	0	9				
		Число				Месяц				Год											
6.	Страна	Россия																			
7.	Регион (пр: Томская обл., Калининградская область)	Томская область																			
8.	Вид муниципального образования (пр: пгт, деревня, село, город)	Посёлок.																			
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Верхнекетский район, д-ль Белый Яр.																			
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ "Белоусская СОШ №1"																			

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись

[Signature]

11.	СНИЛС (для граждан РФ)	1	6	9	-	6	1	4	-	6	1	0	9	6				
12.	Контактный телефон участника	8	9	5	2	6	8	1	7	2	6	3						
13.	e-mail участника																	
14.	Телефон и e-mail одного из родителей	8952 801 7130																
15.	Профиль в telegram	https://t.me/																
16.	Документ, удостоверяющий личность	6	9	2	3					0	8	0	3	3	8			
		серия								номер								
		31.10.2023																
		УМВД России по Томской обл.																
		кем и когда выдан																
17.	Из числа лиц с ограниченными возможностями по здоровью (инвалид) (да/нет)	нет																
18.	Сирота (да/нет)	нет																
19.	Я победитель/призер олимпиады заключительного этапа прошлого года, принимаю участие без отборочного этапа (да/нет)	нет																
20.	ФИО моего учителя по предмету	Болыманова Екатерина Александровна																
21.	Адрес проживания	Кирова 7.																

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада школьников (ОРМО)
с международным участием 2024-2025

МАТЕМАТИКА (9 класс)

Заключительный этап

Вариант 1

1. Пусть x и y — различные положительные числа, причем $x > y$.

Найдите значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$, если известно, что $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$.

(7 баллов)

2. Даны действительные числа $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ такие, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$.
Докажите, что $a + b + c \geq 7$.

(7 баллов)

3. Пусть $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Найдите значение произведения $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{99}$.

(7 баллов)

4. Докажите, что для корней x_1, x_2 многочлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ и любого ненулевого значения p выполняется неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

(7 баллов)

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. На луче DC отложен отрезок DP равный DA , а на луче BA отложен отрезок BQ равный BC . Верно ли, что при этих условиях прямая BD делит отрезок PQ пополам? Ответ объясните.

(7 баллов)

Внимание! Задача считается решенной, если, помимо правильного ответа, приведены необходимые объяснения.

Желаем успеха!

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
145	18.03.25	Гусев	А
Шифр			043126

1/2/3/4/5
6/4/1/4/2

60

1) $x > y$, $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \Rightarrow x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy \Rightarrow (x+y)^2 - 2xy = \frac{10}{3}xy \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x+y)^2 = \frac{10}{3}xy + 2xy = (\frac{10}{3} + 2)(xy) = (\frac{10}{3} + \frac{6}{3})xy = \frac{16}{3}xy \Rightarrow$ Представим,
 что $a = x+y$, $b = xy \Rightarrow a^2 = \frac{16}{3}b \Rightarrow x-y = \sqrt{(x+y)^2 - 4xy} = \sqrt{a^2 - 4b} \Rightarrow a^2 = \frac{16}{3}b \Rightarrow$
 $\Rightarrow x-y = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - 4b} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \sqrt{\frac{1}{12}a^2} = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{\frac{a}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$
 $\Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} \Rightarrow \frac{x+y}{x-y} = \sqrt{\frac{1}{3}a^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{16}{12}} = \frac{4}{2} = 2$
 $\frac{x+y}{x-y} = 2$.

2) $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ $a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$ $a + b + c \geq 7$

Допустим, $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1$.

Тогда $\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + b + c)^2$

$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot 3 \geq (a + b + c)^2$

$3 \cdot 21 \geq (a + b + c)^2$

Если $a=1, b=2, c=3$, тогда $\sqrt{63} \geq a+b+c$ $a+b+c \leq 7,94$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \leq 21$. Возьмем другие значения,
 т.к. эти не подходят по условию.

$a=1, b=4, c=3 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1^2 + 4^2 + 3^2 = 1 + 16 + 9 = 26 \geq 21$.

Тогда и $a+b+c = 1+4+3 = 8 \geq 7$.

3) $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$ Упростим выражение:

$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} \Rightarrow a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2+n-1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^3} - \frac{1}{n^4} \Rightarrow$

$a_n = 1 + 2n^2 - 3 - n + \frac{1}{n^4} = 1 + 2n^2 - n - \frac{2}{n^4}$.

$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99}$ $a_n = 1 + O(\frac{1}{n})$. Выходит, что чем

больше n , тем a ближе к 1

10

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

040126

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 1+2-3-1 = -1$$

$$n=2 \Rightarrow a_1 = 1+1-\frac{3}{8}-\frac{1}{16} = 1+1-0,375-0,0625 = 1,5625$$

$$n=3 \Rightarrow a_1 = 1+\frac{2}{3}-\frac{3}{27}-\frac{1}{81} = 1+\frac{2}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{81}$$

$$a_1 = -1 \Rightarrow P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99} = -a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{99}$$

Из-за того, что один из множителей равен -1 - число получится отрицательным. Значит $P < 0$.

$$(4) \quad x^2 + px - \frac{1}{2p^2} \quad x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$$

По теореме Виета $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases} \quad x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 1 \\ x_2 + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow p = 0 - \text{не подходит по условию задачи.}$$

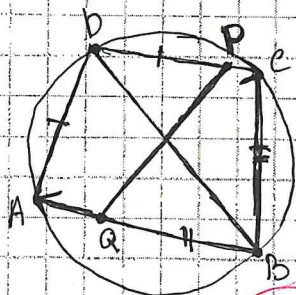
$$\begin{cases} x_1 - 1 = 1 \\ x_2 - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow p = 4 \quad x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^4 + 2^4 = 16 + 16 = 32 \geq 2 + \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x_1 - 1 = 0 \\ x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow p = 2 \quad 1^4 + 1^4 = 1 + 1 = 2 \leq 2 + \sqrt{2}.$$

Для всех корней x_1 и x_2 , кроме 0 и -1 , будет выполняться неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$, так как отрицательные числа в квадрате-положительные, и при сложении чисел, кроме $1, 0, -1$, будет больше $2 + \sqrt{2}$.

(5)



23

У четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна 180° . По свойству симметрии, прямая BD будет делить PR пополам, потому что точки A и C находятся на окружности, а их расстояния до точек D и B будут равны. Следовательно, прямая BD и вправду делит отрезок PR пополам.