Шифр 08060

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 20 | 21.03 | Корнеева Е.Е. | [illegible] |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 5 | 7 | 0 | 20 |

№ 1

$$\frac{\overline{abcd}}{a+b+c+d} = \frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d} = \frac{999a+99b+9c+a+b+c+d}{a+b+c+d} \to 1 + \frac{999a+99b+9c}{a+b+c+d}$$ – необходимо

найти $a, b, c, d$, при которых достигается минимальное значение, значит

числитель дроби должен быть минимален, а знаменатель максимален.

При $a=1, b=0, c=9, d=9$ получаем отношение $\frac{1099}{19} \in (57; 58)$

При увеличении $a$ или $b$ и уменьшении $c$ или $d$ получим увеличение

числителя и уменьшение знаменателя.

Ответ: 1099

док-во?

№ 4

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024\cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024\sin^{2025}(x)$$

замена: $\cos(2x) = a$

$\sin(x) = b$

$$a + a^{2023} + 2024a^{2025} = b + b^{2023} + 2024b^{2025}$$

$$f(a) = a + a^{2023} + 2024a^{2025}$$

$$f'(a) = 1 + 2023a^{2022} + 2024\cdot 2025\, a^{2024} > 0 \Rightarrow f(a) \text{ – возрастает}$$

$$f(b) = b + b^{2023} + 2024b^{2025}$$

$$f'(b) = 1 + 2023b^{2022} + 2024\cdot 2025\cdot b^{2024} > 0 \Rightarrow f(b) \text{ – возрастает}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(a) \text{ – возрастает} \\ f(b) \text{ – возрастает} \\ f(a) = f(b) \end{array}\right| \Rightarrow a = b$$

скобы

Шифр 08060

обратная замена:

$\cos(2x) = \sin x$

$1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

замена: $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z \\ x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \ k \in Z \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, $k \in Z$

№2

$y^2 - x^2 > y - x$

$(y - x)(y + x) - (y - x) > 0$

$(y - x)(y + x - 1) > 0$

1. $\begin{cases} y - x > 0 \\ y + x - 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y > x & (1) \\ y > 1 - x & (2) \end{cases}$

Так как $y \in (0; \frac{1}{2})$ и $x \in (0; \frac{1}{2})$ получаем противоречие во (2) неравенстве

2. $\begin{cases} y - x < 0 \\ y + x - 1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y < x \\ y < 1 - x \end{cases}$

Получаем систему верных неравенств

скобы

Шифр 08060

Докажу, что $y^3 - x^3 > y - x$:

$(y-x)(y^2 + yx + x^2) - (y-x) > 0$

$(y-x)(y^2 + yx + x^2 - 1) > 0$

$(y-x) < 0$ (доказано в п. 2) $\Rightarrow (y^2 + yx + x^2 - 1) < 0$

Докажу, что $(y^2 + yx + x^2 - 1) < 0$

1) $0 < y < \frac{1}{2}$ 2) $0 < x < \frac{1}{2}$

$0 < y^2 < \frac{1}{4}$ $0 < x^2 < \frac{1}{4}$

из 1 и 2 $\Rightarrow y^2 + x^2 < \frac{1}{4}$

$xy > 0$

$\Rightarrow y^2 + x^2 < yx + 1$ ч. т. д.

+

№ 3

$P(17) = a_n 17^n + a_{n-1} 17^{n-1} + \ldots + a_1 17 + a_0 = 17(a_n \cdot 17^{n-1} + a_{n-1} 17^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0 = 2024$

$P(101) = a_n 101^n + a_{n-1} 101^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 101 + a_0 = 101(a_n 101^{n-1} + a_{n-1} \cdot 101^{n-2} + \ldots + a_1) + a_0 = 2024$

замена: $(a_n \cdot 17^{n-1} + a_{n-1} \cdot 17^{n-2} + \ldots + a_1) = k$

$(a_n \cdot 101^{n-1} + a_{n-1} \cdot 101^{n-2} + \ldots + a_1) = m$

$\begin{cases} 17k + a_0 = 2024 \\ 101m + a_0 = 2024 \end{cases}$ $\begin{cases} 17k = 2024 - a_0 \\ 101m = 2024 - a_0 \end{cases}$

$17k = 101m \Rightarrow k \vdots 101;\ m \vdots 17$

1. При ~~m = 17~~ $k = 101$:

$17 \cdot 101 = 2024 - a_0$

$a_0 = 307$

2. При $k = 202$:

$a_0 = -1410$; $|a_0| = 1410 > 999$, противоречие

Место для скобы

Шифр 08060

3. При $k = -101$:

$a_0 = 3741$; $|a_6| > 999$, противоречие

Ответ: 307

при остальных k