Место для скобы

Шифр Ф2Ф-11-20

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
82			

№1

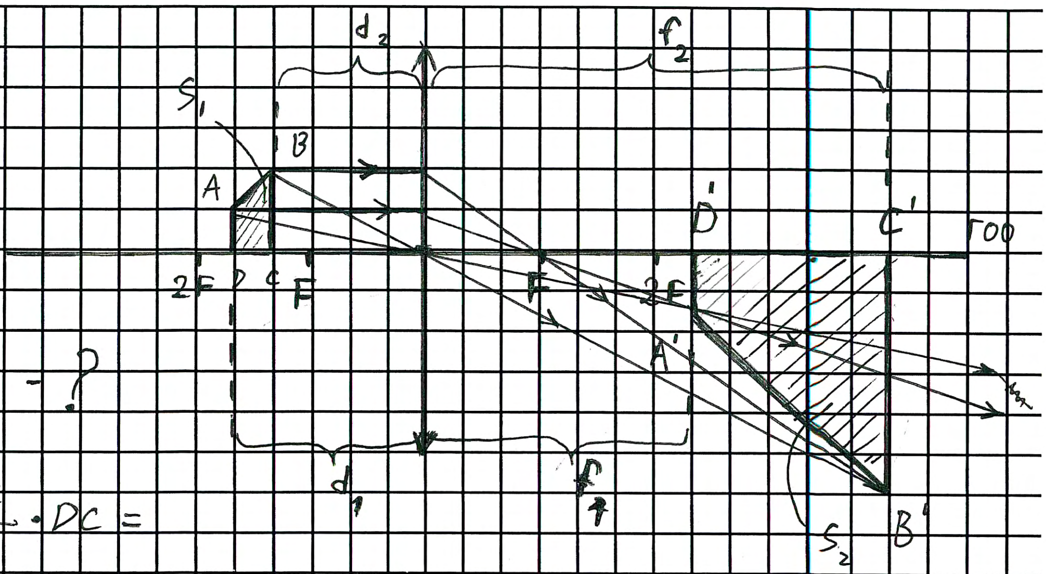
Из условия:

$$\Gamma_1 = \frac{A'D'}{AD} = 1,2$$

$$\Gamma_2 = \frac{B'C'}{BC} = 4$$

$$BC = 2AD$$

$$\frac{S_2}{S_1} - ?$$



~~Решение~~ $S_1 = \frac{AD+BC}{2}\cdot DC = \frac{3AD}{2}\cdot DC$; $S_2 = \frac{A'D'+B'C'}{2}\cdot D'C'$

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{A'D'}{AD}\cdot\frac{BC}{B'C'} = \frac{A'D'\cdot 2AD}{AD\cdot B'C'} = \frac{2A'D'}{B'C'} = \frac{1,2}{4}$$

$$\frac{A'D'}{B'C'} = \frac{1,2}{8} = \frac{3}{20} \Rightarrow B'C' = \frac{20A'D'}{3} \quad (1)$$

Заметим, что Γ_1 и Γ_2 - прямые увеличения линзы:

$$\Gamma_1 = \frac{A'D'}{AD} = \frac{f_1}{d_1} = 1,2 \Rightarrow f_1 = 1,2d_1$$

$$\Gamma_2 = \frac{B'C'}{BC} = \frac{f_2}{d_2} = 4 \Rightarrow f_2 = 4d_2$$

Также заметим из рисунка: $DC = d_1 - d_2$; $D'C' = f_2 - f_1 = 4d_2 - 1,2d_1$

По формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{d_1} + \frac{1}{1,2d_1} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{4d_2} =$

$$= \frac{11}{6d_1} = \frac{5}{4d_2} \Rightarrow d_1 = \frac{22d_2}{15}$$

Откуда: $DC = d_1 - d_2 = \frac{22d_2}{15} - d_2 = \frac{7}{15}d_2$;

№1 продолжение:

$$D'C' = 4d_2 - 1{,}2d_1 = 4\cdot d_2 - 1{,}2\cdot\frac{22}{15}d_2 = \frac{56}{25}d_2$$

$$\frac{D'C'}{DC} = \frac{56d_2}{25}\cdot\frac{15}{7d_1} = \frac{24}{5} \quad (2)$$

Распишем S_2 используя формулу (1):

$$S_2 = \frac{A'D'+B'C'}{2}\cdot D'C' = \frac{A'D' + \frac{20}{3}\cdot A'D'}{2}\cdot D'C' = \frac{23}{6}\cdot A'D'\cdot D'C' \quad (3)$$

Исходя из формул площадей S_1 и S_2, формулы (2) и формулы из условия $\frac{A'D'}{AD} = 1{,}2$, получаем:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{23}{6}\cdot A'D'\cdot D'C'\right) : \left(\frac{3}{2}\cdot AD\cdot DC\right) =$$

$$= \left(\frac{23}{6} : \frac{3}{2}\right)\cdot 1{,}2\cdot\frac{24}{5} = \frac{368}{25} = 14{,}72.$$

Ответ: $\frac{S_2}{S_1} = 14{,}72$

№4

Дано:

$x = \frac{1}{3}l$

Найти:

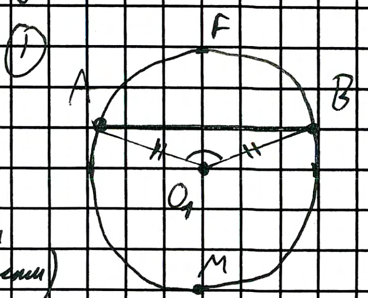
$\frac{R}{R_{AB}}$ - ?

Решение:

Начнём с геометрии. Кольца имеют одинаковый радиус r.

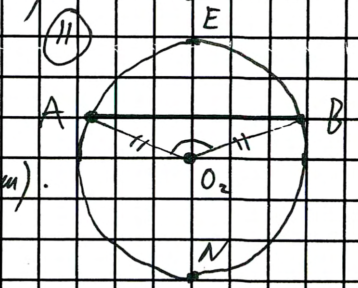
Отрезок AB является общим.

Рассмотрим горизонтальное кольцо:



$\triangle AO_1B$ — равнобедренный, т.к. $AO_1 = O_1B = r$ (O_1 — центр окружности)

Рассмотрим вертикальное кольцо:



$\triangle AO_2B$ — также равнобедренный. $AO_2 = O_2B = r$ (O_2 — центр окружности).

Т.к. $AO_1 = O_1B = AO_2 = O_2B = r$; AB — общая, то

$$\triangle AO_1B = \triangle AO_2B \Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B$$

№4 продолжение.

Т.к. дуги $\cup AFB$ и $\cup AEB$ лежат напротив равных центральных углов $\angle AO_1B = \angle AO_2B$, то они между собой равны: $\cup AFB = \cup AEB$.

В горизонтальном кольце (1) $\cup AFB = x = \frac{1}{3} l = \frac{1}{3} 2\pi r$

А значит: $\cup AEB = \cup AFB = \frac{1}{3} 2\pi r$.

Пусть R – сопротивление одного кольца, тогда:

$$R = \rho \cdot \frac{2\pi r}{S}$$, где ρ – удельное сопротивление материала, S – площадь поперечного сечения.

Пусть R_x – сопротивление дуг $\cup AFB$ и $\cup AEB$ (т.к. дуги равны по длине, то и их сопротивления равны).

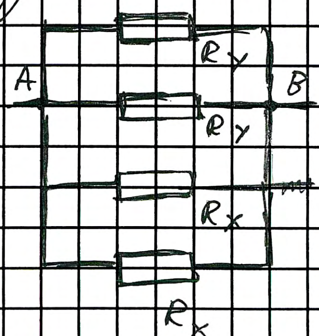
$$R_x = \rho \cdot \frac{2\pi r}{S} \cdot \frac{1}{3} = \frac{R}{3}$$

Тогда сопротивление других двух дуг ~~AEB и AM~~ $\cup AMB$ и $\cup ANB$:

$$R_y = R - R_x = R - \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}$$

(Дуги $\cup AMB$ и $\cup AMB$ равны, т.к. $\cup AEB = \cup AFB$).

Построим эквивалентную схему электрической цепи, данной в условии:



$$R_{AB} = \left(\frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_x}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{3}{2R} + \frac{3}{2R} + \frac{3}{R} + \frac{3}{R}\right) =$$

$$= \frac{R}{9} \Rightarrow \frac{R}{R_{AB}} = 9.$$

Ответ: $\frac{R}{R_{AB}} = 9$

№3

Дано: $m_1 = 3$кг; $m_3 = 1$кг; $A = 10°C$; $e = 900 \frac{Дж}{(кг \cdot °C)}$

$A < B$; $m_2 = 4$кг; $\Delta T_{20} = 5°C$; $c = 4200 \frac{Дж}{(кг \cdot °C)}$; Найти: B – ?

№3 продолжение

До начала опыта: в (I) сосуде: m_1 воды при температуре A

Во (II) сосуде: m_2 воды и m_3 алюминия при температуре B.

$A < B$

I Цикл:

Брусок алюминия переложили в первый сосуд: по уравнению теплового баланса:

$$cm_1(A_1 - A) + em_3(A_1 - B) = 0 =$$

$$= cm_1A_1 - cm_1A + em_3A_1 - em_3B =$$

$$= A_1(cm_1 + em_3) - cm_1A - em_3B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{cm_1A + em_3B}{cm_1 + em_3} \quad (1)$$

Брусок алюминия переложили обратно во второй сосуд:

$$cm_2(B_1 - B) + em_3(B_1 - A_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{cm_2B + em_3A_1}{cm_2 + em_3} \quad (2)$$

После первого цикла: в (I) сосуде температура A_1

во (II) сосуде температура B_1

$$\Delta T_1 = B_1 - A_1 = \frac{cm_2B + em_3A_1}{cm_2 + em_3} - A_1 = \frac{cm_2B + em_3A_1 - cm_2A_1 - em_3A_1}{cm_2 + em_3} =$$

$$= \frac{cm_2(B - A_1)}{cm_2 + em_3}$$

Подставим вместо A_1 формулу (1):

$$\Delta T_1 = \frac{cm_2\left(B - \frac{cm_1A + em_3B}{cm_1 + em_3}\right)}{cm_2 + em_3} = \frac{cm_2\left(\frac{Bcm_1 + em_3B - cm_1A - em_3B}{cm_1 + em_3}\right)}{cm_2 + em_3} =$$

$$= \frac{c^2m_1m_2(B - A)}{(cm_2 + em_3)(cm_1 + em_3)} \quad (3)$$ – разница температур после первого цикла.

Место для скобы

Шифр Ф2Ф-11-20

№3 продолжение

II Цикл.

$$cm_1(A_2-A_1)+em_3(A_2-B_1)=0 \Rightarrow A_2=\frac{cm_1A_1+em_3B_1}{cm_1+em_3} \quad (4)$$

$$cm_2(B_2-B_1)+em_3(B_2-A_2)=0 \Rightarrow B_2=\frac{cm_2B_1+em_3A_2}{cm_2+em_3} \quad (5)$$

$$\Delta T_2=B_2-A_2=\frac{cm_2B_1+em_3A_2-cm_2A_2-em_3A_2}{cm_2+em_3}=\frac{cm_2(B_1-A_2)}{cm_2+em_3} \quad (6)$$

Подставим в (6) формулу (4):

$$\Delta T_2=\frac{cm_2\left(B_1-\frac{cm_1A_1+em_3B_1}{cm_1+em_3}\right)}{cm_2+em_3}=\frac{cm_2\left(\frac{B_1cm_1+B_1em_3-cm_1A_1-em_3B_1}{cm_1+em_3}\right)}{cm_2+em_3}=$$

$$=\frac{c^2m_1m_2(B_1-A_1)}{(cm_2+em_3)(cm_1+em_3)} \quad (7)$$ — разность температур после второго цикла.

Заметим, что $B_1-A_1=\Delta T_1$, поэтому подставим в (7) формулу (3):

$$\Delta T_2=\frac{(c^2m_1m_2)^2(B-A)}{(cm_2+em_3)^2(cm_1+em_3)^2}.$$ Для 3 цикла: $$\Delta T_3=\frac{(c^2m_1m_2)^3(B-A)}{(cm_2+em_3)^3(cm_1+em_3)^3} \ldots$$

Для 20 цикла:

$$\Delta T_{20}=\frac{(c^2m_1m_2)^{20}(B-A)}{(cm_2+em_3)^{20}(cm_1+em_3)^{20}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=\frac{\Delta T_{20}(cm_2+em_3)^{20}\cdot(cm_1+em_3)^{20}}{(c^2m_1m_2)^{20}}+A=$$

$$=\frac{5\cdot(4200\cdot4+900\cdot1)^{20}\cdot(4200\cdot3+900\cdot1)^{20}}{(4200^2\cdot3\cdot4)^{20}}+10=$$

$$=\frac{5\cdot17700^{20}\cdot13500^{20}}{211680000^{20}}+10=5\cdot\left(\frac{177\cdot135}{21168}\right)^{20}+10=$$

$$=5\cdot\left(\frac{885}{784}\right)^{20}+10\approx66,43^\circ C$$ Ответ: $B=66,43^\circ C$

Место для скобы

Шифр ФДФ-11-20

№5

Дано:

$S = L\cdot L = 10^{-2}$ м

$H = 0{,}01$ м

$d = 2\cdot 10^{-3}$ м

$\varepsilon = 4$

$U = 400\cdot 10^{3}$ В

$V = 2{,}5\cdot 10^{-5}$ м^3

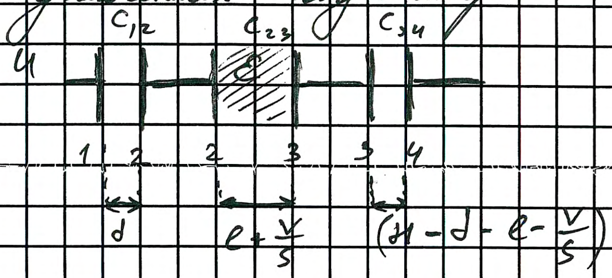
$E = 20\cdot 10^{6}$ В/м

Найти:

$l - ?$

Решение.

Представим всю коробку как три последовательно подключённых конденсатора:



Рассматриваем момент, когда произойдёт пробой.

$$C_{12} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C_{23} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d_{23}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l+\frac{V}{S}}$$

$$C_{34} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_{34}} = \frac{\varepsilon_0 S}{H-d-l-\frac{V}{S}}$$

$$C_0 = \left(\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_{34}}\right)^{-1} = \left(\frac{d}{\varepsilon_0 S} + \frac{l+\frac{V}{S}}{\varepsilon\varepsilon_0 S} + \frac{H-d-l-\frac{V}{S}}{\varepsilon_0 S}\right)^{-1} =$$

$$= \cancel{\left(dS + l + \frac{V}{S} + HS - dS - lS - V\right)} = \left(\frac{\cancel{d\varepsilon} + l + \frac{V}{S} + \varepsilon H - \cancel{\varepsilon d} - \varepsilon l - \varepsilon\cdot\frac{V}{S}}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{l + \frac{V}{S} + \varepsilon H - \varepsilon l - \varepsilon\frac{V}{S}}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\right)^{-1} = \left(\frac{l(1-\varepsilon) + \frac{V}{S}(1-\varepsilon) + \varepsilon H}{\varepsilon\varepsilon_0 S}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{l(1-\varepsilon) + \frac{V}{S}(1-\varepsilon) + \varepsilon H}$$

$$Q_{12} = Q_{23} = Q_{34} = Q_0$$

$$Q_0 = C_0 U = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U}{l(1-\varepsilon) + \frac{V}{S}(1-\varepsilon) + \varepsilon H}$$

$$U_{23} = \frac{Q_0}{C_{23}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U}{l(1-\varepsilon) + \frac{V}{S}(1-\varepsilon) + \varepsilon H} \cdot \frac{l+\frac{V}{S}}{\varepsilon\varepsilon_0 S} =$$

Место для скобы

Шифр Ф2Ф-11-20

№5 продолжение

$$= \frac{U\cdot\left(\ell+\frac{V}{S}\right)}{\left(\ell+\frac{V}{S}\right)(1-\varepsilon)+\varepsilon H}$$

$$E = \frac{U_{23}}{d_{23}} = \frac{U\cdot\left(\ell+\frac{V}{S}\right)}{\left(\ell+\frac{V}{S}\right)(1-\varepsilon)+\varepsilon H}\cdot\frac{1}{\ell+\frac{V}{S}} = \frac{U}{\left(\ell+\frac{V}{S}\right)(1-\varepsilon)+\varepsilon H} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left(\ell-\ell\varepsilon+\frac{V}{S}-\frac{V}{S}\cdot\varepsilon+\varepsilon H\right)=U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell(1-\varepsilon)+\frac{V}{S}(1-\varepsilon)+\varepsilon H = \frac{U}{E} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ell = \left(\frac{U}{E}-\varepsilon H-\frac{V}{S}(1-\varepsilon)\right)\cdot\frac{1}{1-\varepsilon} =$$

$$= \left(\frac{400\cdot10^{3}}{20\cdot10^{6}}-4\cdot0{,}01-\frac{2{,}5\cdot10^{-5}}{10^{-2}}(1-4)\right)\cdot\frac{1}{1-4} =$$

$$= 4{,}167\cdot10^{-3}\text{ м} = 4{,}167\text{ мм}.$$

Ответ: $\ell = 4{,}167$ мм

№2 Уравнение движения для 1 корабля (в ед. миль и часов):

$$S_1 = 8t+\frac{a}{2}t^2$$

Уравнение движения для 2 корабля:

$$S_2 = 10t+\frac{a}{2}t^2$$

По условию: $S_2 = 10 = 10t_1+\frac{a}{2}t_1^2$

$8-1=7 \geq S_1 = 8t_1+\frac{a}{2}t_1^2$, где 8 и 10 – расстояние до точки пересечения траекторий кораблей

А также: $S_1 = 8 = 8t_2+\frac{a}{2}t_2^2$

$10+1 \leq S_2 = 10t_2+\frac{a}{2}t_2^2$.