

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
11		Карескеев	И
Шифр			042019

Задача 1.

$$x \neq y; \quad x > 0; \quad y > 0$$

$$x > y$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy$$

$$\frac{x+y}{x-y} = ?$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3} xy \quad | : y^2$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{10 \cdot xy}{3 \cdot y^2} \quad ?$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{10 \cdot xy}{3y^2}$$

$$\frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{10x}{3y}$$

Пусть $\frac{x}{y} = t$

$$t^2 + 1 = \frac{10 \cdot t}{3} \quad | \cdot 3$$

$$3t^2 + 3 = 10t$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0 \quad a=3; \quad b=-10; \quad c=3$$

$$D = b^2 - 4ac = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 100 - 36 = 64 \quad \sqrt{64} = 8$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad t_1 = \frac{10+8}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3$$

$$t_2 = \frac{10-8}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t = \frac{x}{y} \geq 1 \quad \frac{x}{y} = 3$$

$x > 1$ $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ не подходит, т.к. $x > y$ (по усл.)

$$\frac{x}{y} = 3 \quad x = 3y$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{3y+y}{3y-y} = \frac{4y}{2y} = 2$$

Ответ: 2

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2

$$a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3 \quad a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

$$\text{н-ть: } a + b + c \geq 7$$

1-во:

возьму минимальные значения для a, b, c :

$$a = 1, b = 2, c = 3 ?$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 \geq 21$$

$$1 + 4 + 9 \geq 21$$

$$14 \geq 21 \quad \text{неверно}$$

$$a + b + c = 1 + 2 + 3 = 6$$

т.к. неравенство $14 \geq 21$ —
неверно, то сумма значений
должна быть больше.

значения могут увеличиться (т.к. $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$)
из условия

увеличу значение c до 4

$$a = 1, b = 2, c = 4$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 21$$

$$1^2 + 2^2 + 4^2 \geq 21$$

$$1 + 4 + 16 \geq 21$$

$$21 \geq 21 \quad \text{верно}$$

$$a + b + c = 1 + 2 + 4 = 7$$

неравенство $21 \geq 21$ верно,
поэтому сумма значений
будет больше или равна 7

$$a + b + c \geq 7$$

ч. т. д.

б. *лучше
сделать*

х

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 3

$$a_1 = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^4} \quad a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{99}$$

приведу выражение $= a_1$ к общему знаменателю:

$$a_1 = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4}$$

$$a_2 \cdot a_3 = ? \quad a_2 = \frac{2^4 + 2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 - 1}{2^4} =$$

$$= \frac{16 + 16 - 4 - 1}{16} = \frac{27}{16}$$

$$a_3 = \frac{3^4 + 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 - 1}{3^4} =$$

$$= \frac{81 + 54 - 6 - 1}{81} = \frac{128}{81}$$

$$a_2 \cdot a_3 = \frac{27}{16} \cdot \frac{128}{81} = \frac{8}{3}$$

$$a_4 \cdot a_5 = ? \quad a_4 = \frac{4^4 + 2 \cdot 4^3 - 2 \cdot 4 - 1}{4^4} =$$

$$= \frac{256 + 128 - 8 - 1}{256} = \frac{375}{256}$$

$$a_5 = \frac{5^4 + 2 \cdot 5^3 - 2 \cdot 5 - 1}{5^4} =$$

$$= \frac{625 + 125 - 10 - 1}{625} = \frac{739}{625}$$

$$a_4 \cdot a_5 = \frac{375}{256} \cdot \frac{739}{625} = \frac{3}{8} \cdot \frac{27}{5}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{27}{5}$$

(разными упрощаем)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

аналогичным образом произведений оставшихся
 $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \dots a_{53} = 1$ *законно!*
 Ответ: 1

Задача 4

для x_1, x_2 многочлена $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ ($p \neq 0$) верно:
 $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$

используя т. Виетта:

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0 \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2} \end{cases}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4}$$

$$p^4 + \frac{1}{p^4} \geq \sqrt{2}$$

$$1. (p) = p^4 + \frac{1}{p^4}$$

$$2. (p) = 4p^3 - \frac{2}{p^5} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4p^3 = \frac{2}{p^5}$$

$$p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}^{-\frac{1}{2}}$$

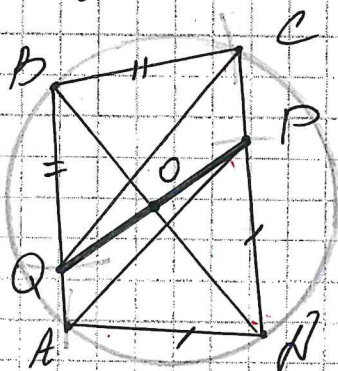
из этого следует, что

$$p^4 + \frac{1}{p^4} \geq \sqrt{2}$$

$$\text{и } x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} \geq \sqrt{2} + 2 \quad \text{ч.т.д.}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 5



Дано:

$ABCD$ вписан в окр.

$P \in AC, OA = OP$

$Q \in BD, BC = BQ, BD \cap PQ = O$

Верно, что $QO = OP$ — ?

Решение:

1. $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\angle C + \angle A = 180^\circ$ (т.к. противоположные $\angle$ в вписанном 4-х уг-ке $ABCD$)

2. $OA = OP$

$BC = BQ$ (из условия)

из 1, 2 $\Rightarrow \triangle OAP \cong \triangle OCB$? $AC \parallel BA$

3. $BD \cap PQ = O$

т. $P \in AC$

т. $Q \in BD$

— т. принадлежат 11 прямой, не касаясь!
диагональ BD делит OP на 2 равные части

то $QO = OP$ ч.т.д.

Ответ: Верно, $BD \cap PQ$ и
 BD делит PQ пополам

