

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
12		Корсаков	К
Шифр			042008

1 2 3 4 5 Σ
0 0 5 2 5 12 K

№2

$$f(x) = x^2 + ax + b ; f(x) \geq -\frac{9}{10} \quad f(x) \geq -\frac{1}{4} ?$$

$f(x)$ принимает своего минимума в точке $x = -\frac{a}{2}$:

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b$$

$$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10} \quad \text{распишем пока} \quad b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}$$

$$f(x) \geq -\frac{1}{4} \quad \text{докажем} \quad -\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{равняем} \quad b \geq -\frac{9}{10} + \frac{a^2}{4}$$

$$b \geq -\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$-\frac{9}{10} + \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow -\frac{9}{10} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$-\frac{36}{40} \geq -\frac{10}{40} \quad -36 \geq -10$$

Это неравенство верно, т.к. $-36 < -10$

Следовательно, мы доказали, что для всех действительных x выполняется $f(x) \geq -\frac{1}{4}$

№3

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

Запишем формулу общего члена прогрессии: $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$a_{2025} = a_1 + (2025-1)d$$

$$625 = 25 + 2024d$$

$$2024d = 600 ; d = \frac{600}{2024} = \frac{150}{506} = \frac{75}{253}$$

Каждый член суммы имеет вид: $\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{a_{n+1} - a_n}; \quad \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d}$$

Теперь у нас получаем сумму: $S = \sum_{n=1}^{2024} \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d} = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{2024} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$

$\sum_{n=1}^{2024} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}$; представим значения:

$$\sqrt{a_{2025}} = \sqrt{625} = 25$$

$$\sqrt{a_1} = \sqrt{25} = 5$$

Таким образом $S = \frac{1}{d} (25 - 5) = 20$

$$S = 20 \cdot \frac{75}{253} = 20 \cdot \frac{253}{75} = \frac{5060}{75} = \frac{1012}{15}$$

Ответ: $\frac{1012}{15}$

№1

$$(10 + a - b)^2 + (2 + b - c)^2 + (3 + c - a)^2$$

Максимальное значение в квадрате, принимает значение равно нулю.

Рассмотрим выражения:

$$10 + a - b = 0, \quad b = 10 + a$$

$$2 + b - c = 0, \quad c = b + 2$$

$$3 + c - a = 0, \quad c = a - 3$$

Подставим $10 + a$:

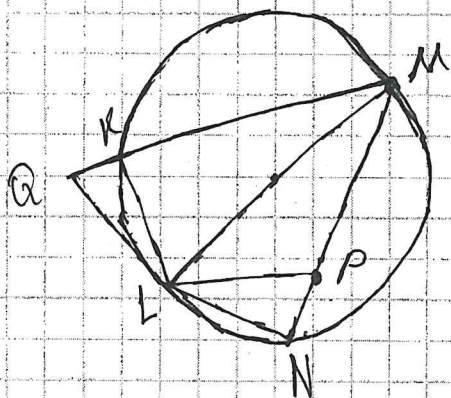
$$(10 + a - (10 + a))^2 + (2 + (a + 10) - (a + 12))^2 + (3 + (a + 12) - a)^2 =$$

$$= (10 + a - a - 10)^2 + (2 + a + 10 - a - 12)^2 + (3 + a + 12 - a)^2 = 0^2 + 0^2 + 15^2 = 225$$

Ответ: 225.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№5.



Дано:

$$\begin{aligned} \angle MNK &= 81^\circ \\ \angle LMN &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$MN + MK = ?$$

Решение:

Пусть LP и LQ перпендикулярны к MN и MK .
 L лежит на дуге MN и MK и равноудалена от сторон $\angle$
 следовательно $LP = LQ$.

Рассмотрим $\triangle NPL$ и $\triangle QKL$; $NPL = LQK$ (по касательной и хорде).

$\triangle MPL = \triangle MQL$ (по касательной и хорде). (Аналогично).

Найдём с 2-х сторон:

$$① MN + MK = MP + PN + MK = MP + KQ + MK = MP + MQ = 2MP.$$

$$② 81 = \angle MNK = \angle MPL + \angle MQL = 2\angle MPL = MP. \quad PL = MP \cdot \tan 30^\circ = \frac{MP^2}{\sqrt{3}}$$

$$MP = 9\sqrt{3}$$



$$\text{Значит } MN + MK = 2MP = 18\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } 18\sqrt{3}$$

№6

По теореме о значении многочлена: $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$

Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + 1 - x + 50) \quad \text{где } Q(x) = 0.$$

Для корней x_i многочлена $Q(x)$ выполняем $Q(x_i) = 0$

$$\text{Поэтому } P(x_i) = -x_i + 50.$$

Найдем сумму значений $P(x_i)$:

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = \sum_{i=1}^4 (-x_i + 50) = -\sum_{i=1}^4 x_i + 4 \cdot 50$$

Сумма корней $Q(x)$:

По теореме Виета сумма корней многочлена:

$$\sum_{i=1}^4 x_i = -\frac{\text{коэффициент при } x^3}{\text{коэффициент при } x^4} = -1$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$\sum_{i=1}^4 P(x_i) = -(-1) + 200 = 1 + 200 = 201$$

это от куда?

Ответ: 201