

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
13		Коржаков	И
Шифр			042007

$$N_1$$

$$1) (10+a-b)^2 + (2+b-c)^2 + (3+c-a)^2$$

$$x+y+z = a-b+b-c+c-a = 0$$

$$\begin{cases} x = a-b \\ y = b-c \\ z = c-a \end{cases} \Rightarrow (10+x)^2 + (2+y)^2 + (3+z)^2 = 100 + 20x + x^2 + 4 + 4y + y^2 + 9 + 6z + z^2 =$$

$$= 113 + 20x + 4y + 6z + x^2 + y^2 + z^2$$

$$113 + 20x + 4y - 6x - 6y + x^2 + y^2 + x^2 + 2xy + y^2$$

$$113 + (20x - 6x) + (4y - 6y) + (x^2 + x^2) + (y^2 + y^2) + 2xy =$$

$$= 113 + 14x - 2y + 2x^2 + 2y^2 + 2xy$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy + 14x - 2y = ?$$

$$2(x^2 + xy + \frac{7}{2}x) + 2(y^2 - y) = ?$$

$$x^2 + xy + \frac{7}{2}x = \left(x + \frac{y}{2} + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + \frac{7}{4}\right)^2$$

$$y^2 - y = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

1	2	3	4	5	Σ
2	1	5	1	4	13

$$2 \left(\left(x + \frac{y}{2} + \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + \frac{7}{4}\right)^2 \right) + 2 \left(\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$x + \frac{y}{2} + \frac{7}{4} = 0 \quad y - \frac{1}{2} = 0$$

$$x + \frac{y}{2} + \frac{7}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{15}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$z = -x - y = -\frac{15}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{16}{4} = -4$$

$$(10+x)^2 + (2+y)^2 + (3+z)^2 = \left(10 - \frac{15}{4}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - 4\right)^2$$

$$10 - \frac{15}{4} = \frac{25}{4}, \quad \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \frac{625}{16}$$

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$3 - 4 = -1, \quad (-1)^2 = 1$$

$$\frac{625}{16} + \frac{25}{4} + 1 = \frac{625}{16} + \frac{100}{16} + \frac{16}{16} = \frac{741}{16} = 46.3125$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№2
 $f(x) = x^2 + ax + b$

$x = -\frac{a}{2}$

А когда? каковы условия.

$$f\left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b$$

или $f(x) = -\frac{a^2}{4} + b$

$f(x) \geq -\frac{9}{10}$

$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{1}{4}$

$b = \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}$?

$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{9}{10}$

$-\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}\right) \geq -\frac{1}{4}$

$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10}$

$-\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{9}{10} \geq -\frac{1}{4}$

$-\frac{9}{10} \geq -\frac{1}{4}$ — это неверно, следовательно
надо решить по другому

$f(x) \geq -\frac{9}{10}$

$D = a^2 - 4b \leq 0$

$-\frac{a^2}{4} + b \geq -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 0$?

$-\frac{a^2}{4} + b \geq 0$

Следовательно мы доказали что для всех
действительных x выполняется $f(x) \geq -\frac{9}{10}$

✓

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

№3

$$a_1 = 25, a_2, a_3, \dots, a_{2025} = 625$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{2024}} + \sqrt{a_{2025}}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad d - \text{разность прогрессии}$$

$$a_{2025} = 25 + (2025-1)d = 625$$

$$25 + 2024d = 625 \Rightarrow 2024d = 600 \Rightarrow d = \frac{600}{2024} = \frac{150}{506} = \frac{75}{253}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \cdot \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{a_n - a_{n+1}}$$

Так как $a_{n+1} = a_n + d$, то $a_n - a_{n+1} = -d$

$$\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n+1}}}{-d} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}}{d}$$

S - сумма

$$S = \sum_{n=1}^{2024} \frac{1}{d} (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n})$$

Заметим то что большинство членов сокращаются

$$S = \frac{1}{d} (\sqrt{a_{2025}} - \sqrt{a_1}) \quad \text{Подставим } a_{2025} = 625 \text{ и } a_1 = 25$$

$$S = \frac{1}{d} (\sqrt{625} - \sqrt{25}) = \frac{1}{d} (25 - 5) = \frac{20}{d}$$

$$d = \frac{150}{506}$$

$$S = \frac{20}{\frac{150}{506}} = \frac{20 \cdot 506}{150} = \frac{1012}{30} = \frac{506}{15}$$

X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

~4

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^2 + x - 50$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 корни $Q(x)$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$1. Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

$$2. P(x) = Q(x) \cdot (x^2 + ax + b) + R(x)$$

$R(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на $Q(x)$

$$3. x = x_i$$

$$P(x_i) = Q(x_i) \cdot (x_i^2 + ax_i + b) + R(x_i)$$

$$Q(x_i) = 0 \quad P(x_i) = R(x_i) \Rightarrow P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = R(x_1) + R(x_2) + R(x_3) + R(x_4)$$

$$4. R(x) = cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$R(x_i) = cx_i^3 + dx_i^2 + ex_i + f$$

$$5. \text{Сумма } R(x_1) + R(x_2) + R(x_3) + R(x_4) \text{ будет:}$$

$$c(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3) + d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + e(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 4f$$

$$6. x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

Отсюда! Коэффициенты

$$7. x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -4$$

$$8. x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$$

$$9. x_1x_2x_3x_4 = 1$$

$$10. x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$$

При подстановке и упрощении получается сумма получается 0

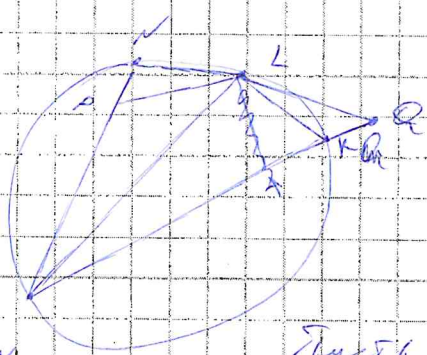
$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = 0$$

✓

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

~5



Дано: $\angle MNK = 81^\circ$
 $\angle LMN = 30^\circ$

Найти

$MN + MK = ?$

Решение

Пусть $LP \perp MN$ и $LQ \perp MK$.
Точки L и P лежат на биссектрисе угла M и равно удалены от сторон угла $\Rightarrow LP = LQ$.

$\triangle MPL \cong \triangle LQK$ (по катету и углу гипотенузы)

$\triangle MPL \cong \triangle MQK$ (по катету и углу гипотенузы)

$$MN + MK = MP + PN + MK = MP + KQ + MK = MP + MQ = 2MP$$

С другой стороны

используем.

$$49 = S_{MNK} = S_{MPL} + S_{MQK} = 2S_{MPL} = MP \cdot PL = MP^2 \cdot \cos 30^\circ = \frac{MP^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MP^2 = 49\sqrt{3}$$

$\neq$

$$MN + MK = 2MP = 14\sqrt{3}$$

X