ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
18		Емельянова	Ему

Шифр [illegible]

1	2	3	4	5	Σ
1	7	4	0	6	18

Задание 1.

$(7+a-b)^2+(2+b-c)^2+(9+c-a)^2$

Минимальное выражение положительного числа „0", тогда пусть:

$9+c-a=0$

$c=a-9$, подставим $(7+a-b)^2+(2+b-a+9)^2=$

$=(7+a-b)^2+(11+b-a)^2$

~~предположим~~ ? $11+b-a=0$

$b=a-11$, тогда $(7+a-a+11)^2=18^2$

Ответ: 324.

Задание 2.

$P(x)=x^6+x^5-4x^4+x^2-x+506$

$Q(x)=x^4+x^3-4x^2+1$

$x^4+x^3-4x^2+1=0$ – это уравнение имеет корни x_1, x_2, x_3, x_4

$P(x)=x^2(x^4+x^3-4x+1)-x+506$

$P(x_i)=x_i^2\cdot Q(x_i)-x_i+506$, $Q(x_i)=0$, тогда

$P(x_1)=-x_1+506$, аналогично

$P(x_2)=-x_2+506$

$P(x_3)=-x_3+506$

$P(x_4)=-x_4+506$

$P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=-x_1-x_2-x_3-x_4+506\cdot 4=$

$=-(x_1+x_2+x_3+x_4)+2024$ +

Я $x_1+x_2+x_3+x_4=-1$ по теореме Виета

тогда $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=2025.$

Задание 3.

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=0.$$

$$x^2-6\sqrt{x^2+1}+11=\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}$$

Рассмотрим левую часть уравнения

$$f(x)=x^2-6\sqrt{x^2+1}+11=\sqrt{x^2+1}^{\,2}-6\sqrt{x^2+1}+10$$

Введем замену $\sqrt{x^2+1}=t>0.$

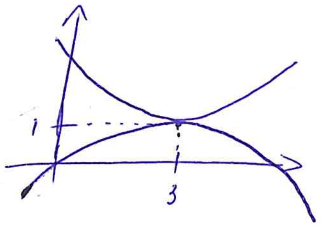
$$f(t)=t^2-6t+10$$

Найдем наименьшее значение $f(t)$, - это вершина параболы

$t_0=3$ $\quad f(3)=9-18+10=8.$ +

Значит? $x^2=6\sqrt{x^2+1}+11$ - наименьшее значение равно 1.? почему? Нет обоснования

Правая часть $-1\le\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}\le 1$, т.е. наибольшее значение это 1, тогда если уравнение имеет решение, то правая и левая часть должны равняться единице.



$\sqrt{x^2+1}=3$?

$x^2+1=9$

$x^2=8.$

$x=\pm\sqrt{2}.$ вычислено неверно!

$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ...

$x=\sqrt{2}$

$$\cos\frac{2+2-4}{18}=\cos 0=1$$

$x=-\sqrt{2}.$

$$\cos\frac{2-2-4}{18}\neq 1$$

Ответ: $x=\sqrt{2}$

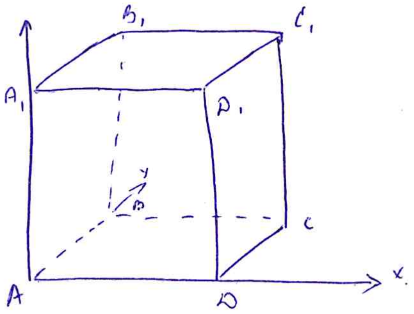
Задание 4.

$x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\dots+x_n^{n-1}=x_1x_2\dots x_n.$$

$$(x_1-n+1)(x_2-n+1)\dots(x_n-n+1)\ge 1.$$

Задание 5.



Пусть $\vec{n}_1 \perp \alpha$, $\vec{n}_2 \perp \beta$ <=>

$\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|$

В качестве $\vec{n}_1$ можно принять $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC} = (1;1;0)$

Пусть $\vec{n}_2$ имеет координаты $(p;q;r)$

т.к. $CD_1 \parallel \beta$, то $\vec{n}_2 \perp CD_1$

$\overrightarrow{CD_1} = D_1 - C = (1;0;1) - (1;1;0) = (0;-1;1)$

$\vec{n}_2 \perp \overrightarrow{CD_1} \Rightarrow \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0 \Rightarrow -q + r = 0$, $r = q$

т.е. $\vec{n}_2$ имеет вид $(p;q;q)$

Пусть $(\widehat{\vec{n}_1; \vec{n}_2}) = \varphi$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{p+q}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2q^2}}$$

БОО. можно считать, что $q = 1$.

Требуется найти $\min|\cos\varphi| = \min \frac{|p+1|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2}} = a > 0$.

т.е. Требуется найти наименьшее a, $a > 0$, при котором уравнение $\frac{|p+1|}{\sqrt{2}\sqrt{p^2+2}} = a$ имеет p ?

$$(p+1)^2 = 2a^2(p^2+2)$$

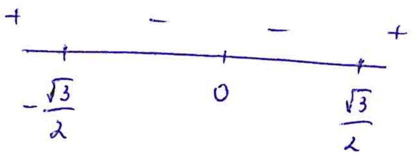
$$2a^2p^2 + 4a^2 = p^2 + 2p + 1$$

$$p^2(2a^2-1) - 2p + 4a^2 - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 - (2a^2-1)(4a^2-1)$$

$$8a^4 - 6a^2 + 1 - 1 = 0.$$

$$2a^2(4a^2-3) \geq 0$$



$a > 0$!

$$\min|\cos\varphi| = a_{min} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\varphi_6 = \frac{\pi}{6}.$$