**МАТЕМАТИКА (11 класс)**

**Заключительный этап (2020-2021)**

**Вариант 3**

1. Существует ли такое число, что все три числа

являются целыми?

**(7 баллов)**

**Ответ: не существует.**

**Решение:**

Допустим, что существует такое , что все три числа являются целыми. Отметим, что первое число и третье число отличаются только знаком, поэтому достаточно, например, рассмотреть первое число и второе число. Итак, допустим, что существует такое , что первые два числа являются целыми, тогда

Тогда из второго уравнения получим и затем подставим в первое ). Но тогда

1. Решите уравнение

 **(7 баллов)**

**Ответ:**

**Решение:**

Введем функцию . Функция является возрастающей, как сумма трех возрастающих функций. Следовательно, уравнение равносильно уравнению . В нашем случае, имеем:

1. Пусть , , целое число. Возможно ли представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами? Ответ объясните.
2. **баллов)**

**Ответ: невозможно.**

**Решение:**

Допустим, что это возможно, то есть можно представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами:

где все коэффициенты целые числа, а .

Так как , то один из сомножителей по абсолютной величине равен 3, а другой 1. Пусть для определенности

Заметим, что рациональные корни являются целыми числами и делителями числа 3. Поэтому легко проверить, что этот многочлен не имеет рациональных корней и Сравнивая коэффициенты, имеем

Из первых равенств следует, что все числа делятся на 3. Тогда из последнего равенства следует, что тоже делится на 3, но следовательно, пришли к противоречию.

1. Найдите все значения , при которых существуют положительные решения неравенства
2. **баллов)**

**Ответ:**

**Решение:**

Введем обозначение Тогда исходное неравенство перепишется в виде

 Но для выполняется неравенство

причем равенство достигается при (это неравенство должно быть доказано в работе).

Следовательно, в нашем случае получаем равенство

Тогда Решая это уравнение, получаем, тогда

1. На плоскости рассматривается треугольник *ABC*, внутри которого выбрана точка *P*, а точки *M, N, K* являются ортогональными проекциями точки *P* на прямые *BC* , *AC* и *AB* соответственно. Найдите все точки *P*, для которых сумма минимальнач.

 **(7 баллов)**

**Ответ: *P* ⎯ центр окружности, вписанной в**

**Решение:**

Пусть



Тогда задача сводится к нахождению поиска точки минимума функции

решить которую «в лоб» возможно, но достаточно сложно.

Используем другой известный прием.

 Так как точка *P* – внутренняя точка треугольника, то площадь треугольника

.

Так как *S* ⎯ постоянная, то найдем точку минимума функции

Учитывая, что а равенство достигается при , получим

причем равенство достигается Тогда следовательно, точка *P* ⎯ центр окружности, вписанной в

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |