**МАТЕМАТИКА (10 класс)**

**Заключительный этап (2020⎯2021)**

**Вариант 3**

1. Существует ли такое число$ x$, что все три числа

$$\sqrt{x^{2}+2020}-x, \sqrt{x^{2}+2}-\sqrt{x^{2}+2020}, 2x-\sqrt{x^{2}+2020} $$

$ $являются целыми?

 **(7 баллов)**

**Ответ: не существует.**

**Решение:**

Допустим, что существует такое $x$, что все три числа являются целыми.

Сложив первое число с третьим, получим $-3x$ , следовательно $x-$целое.

Но если сложить первое и второе, то получим $\sqrt{x^{2}+2}-x$, которое тоже должно быть целым, как разность двух целых чисел. Учитывая, что $x-$целое, приходим к тому, что $\sqrt{x^{2}+2} $должно быть целым, а это невозможно (в работе это должно быть показано любым способом – через остатки, четность (нечетность) и т.д.).

1. Решите систему уравнений $\left\{\begin{array}{c}3xy-5yz-xz=3y,\\-5xy+4yz+xz=-4y,\\ xy+yz=-y.\end{array}\right.$

 **(7 баллов)**

**Ответ: (**$2;- \frac{1}{3};-3$**), (**$a;0;0$**), (**$0;0;c$**),** $a,c\in R.$

**Решение:**

Из третьего уравнения следует, что либо $y=0$, либо $z=-1-x.$ Рассмотрим 2 возможных случая:

1. $y=0$. Тогда первое и второе уравнения сводятся к $ xz=0$. Следовательно, решениями в этом случае будут всевозможные наборы вида ⎯ ($a;0;0$), ($0;0;c$), $a,c\in R.$
2. $z=-1-x.$ Тогда сложим первое уравнение и второе уравнения, получим $-2xy-yz=-y$, откуда $z=1-2x.$ Учитывая, что $z=-1-x,$ получим

$x=2,$ $z=-3$. Затем подставляем $x=2, $ $z=-3$ в первое или второе уравнение и находим, что $y=-\frac{1}{3}.$

1. Относительно квадратного трехчлена $ f\left(x\right)$ известно, что $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$,

 $f\left(2\right)+f\left(3\right)=0$. Чему равна сумма корней уравнения $f\left(x\right)=2022.$

1. **баллов)**

**Ответ: 3.**

**Решение:**

Выпишем квадратный трехчлен $ f\left(x\right)$ в общем виде:

$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c, a\ne 0$.

Учитывая, что $f\left(0\right)+f\left(1\right)=0$, $f\left(2\right)+f\left(3\right)=0$, получим

$$\left\{\begin{array}{c}a+b+2c=0,\\13a+5b+2c=0.\end{array}\right.$$

Вычитая из второго уравнения первое уравнение, получим $b=-3a.$ Подставляя последнее равенство в первое уравнение, получим $c=a.$ Следовательно, уравнение

$f\left(x\right)=2020 $примет вид:

$ax^{2}-3ax+a-2022=0$.

Так как $a\ne 0$, $x^{2}-3x+\frac{a-2022}{a}=0$.

Следовательно, по теореме Виета сумма корней уравнения равна 3 (при условии, что корни существуют).

1. Докажите, что $\sqrt[2020]{2019∙2020^{-1}}+\sqrt[2020]{2020∙2017^{-1}}>2 .$
2. **баллов)**

 **Решение:** Пусть $S=\sqrt[2020]{2019∙2020^{-1}}+\sqrt[2020]{2020∙2017^{-1}}.$

Тогда $S>\sqrt[2020]{2019∙2020^{-1}}+\sqrt[2020]{2020∙2019^{-1}}=a+\frac{1}{a}.$

Так как$ a+\frac{1}{a}\geq 2$ для $∀a>0 $(в работе это должно быть доказано любым способом - неравенством о средних, ФСУ, методом интервалов, графиком и т.д.), то $S>2.$

1. В прямоугольном треугольнике c катетами $a$, $ b$ и гипотенузой $c$проведена высота $h$ к гипотенузе. Возможно ли, чтобы сумма $c+h$ была меньше суммы $ a+ b$? Ответ объясните.

 **(7 баллов)**

**Ответ: невозможно.**

**Решение:**

Допустим, что это возможно, а именно$ c+h<$ $a+ b$.

Вычисляя площадь прямоугольного треугольника двумя способами $S=\frac{ab}{2} =\frac{ch}{2} $,

получаем, что $h=\frac{ab}{c}$. Подставляя последнее равенство в неравенство, имеем

$c+\frac{ab}{c}<$ $a+ b$, $⇒ c^{2}+ab<ac+bc, ⇒ \left(c-a\right)\left(c-b\right)<0.$

 Приходим к противоречию, так как длина гипотезы больше длины каждого катета.

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |