

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
| 23         |      | Коржиков    | К       |
| Шифр       |      |             | 042108  |

1)  $x, y > 0$

$x > y$

$x^2 + y^2 + 5xy \mid 2$

$2x^2 + 2y^2 + 2 \cdot 5xy$

$2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0 \mid : y^2$

$y \neq 0$

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 - 5\frac{x}{y} = 0$

пусть  $\frac{x}{y} = z \geq 1$ , т.к.  $x > y$

$2z^2 + 2 - 5z = 0$

$2z^2 - 5z + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 = 3^2$

$\begin{cases} z = 2 \text{ к.} \\ z = \frac{1}{2} \text{ нек.} \end{cases}$

$z \geq 1$

$\frac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$

$\frac{x+y}{x-y} = \frac{2y+y}{2y-y} = \frac{3y}{y} = 3$

Ответ: 3

|   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ  |
| 7 | 2 | 7 | 0 | 7 | 23 |

2) Пусть  $a^2 - a = m$   $\Rightarrow a^2 = m + a$   
 $a^4 - a = n$   $\Rightarrow a^4 = n + a$

$(a^2)^2 = a^4$

подставим 1 и 2:  $(m+a)^2 = n+a$

$m^2 + 2am + m + a^2 = n + a$  (подставим 1):

$m^2 + 2am + m + a = n + a$

$m(m + 2a + 1) = n$

т.к.  $m, n, 1$  - целые числа  $\Rightarrow 2a$  - целое число

3)  $a^2 - a - m = 0$

$\Delta = 1 - 4(-m) = 1 + 4m$

$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4m}}{2}$

$2a = 1 \pm \sqrt{1+4m}$

Пусть  $1 + 4m = x^2 \Rightarrow 4m = (x-1)(x+1)$

$\begin{cases} x-1=4 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=6 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=4 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=6 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=4 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=6 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=4 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=6 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=4 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=6 \\ x+1=m \end{cases}$

$\begin{cases} x-1=4 \\ x+1=m \end{cases}$

$x = \sqrt{1+4m}$  целое?

как проверить?  
через к к к?

$\begin{cases} a_1 = 3 - \text{целое} \\ a_2 = -2 - \text{целое} \end{cases} \Rightarrow a - \text{целое число}$   
 $\begin{cases} a_1 = 2 - \text{целое} \\ a_2 = -1 - \text{целое} \end{cases}$   
4 и 5 г.

7

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. Жюри | Подпись |
|------------|------|-------------|---------|
|            |      |             |         |

Шифр

3)  $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$

Сгруппируем первое и четвёртое:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 - 1}{n^4} = \frac{(n^2)^2 - 1^2}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)(n^2 + 1)}{n^4}$$

Сгруппируем второе и третье:

$$\frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} = \frac{2(n^2 - 1)}{n^3} = \frac{2(n-1)(n+1)}{n^3}$$

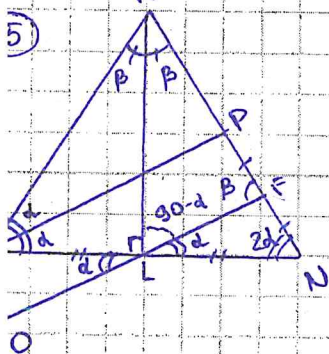
$$= \frac{(n-1)(n+1)(n^2 + 1)}{n^4} + \frac{2(n-1)(n+1)}{n^3} = \frac{(n-1)(n+1)}{n^3} \left[ \frac{n^2 + 1}{n} + 2 \right] = \frac{(n-1)(n+1)(n+1)^2}{n^4} = a_n$$

Подставим вместо  $n$  числа:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{79} = \frac{1 \cdot 8}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdot \dots \cdot \frac{77 \cdot 79^3}{78^4} \cdot \frac{78 \cdot 80^3}{79^4} = \frac{80^3}{2^3 \cdot 79} = \frac{2^3 \cdot 40^3}{2^3 \cdot 79} = \frac{64000}{79}$$

$$= 810 \frac{10}{79}$$

Ответ:  $810 \frac{10}{79}$



Решение:

KL - биссектриса, проведённая к основанию в  $\triangle KMN \Rightarrow \angle KLM = \angle KLN = \beta$  (KL-биссектриса)  
 $\angle KMP = \angle PNM = \alpha$  (MP-биссектриса)  
 Проведём OF || MP  
 по т. Фалеса:  $PF = FN$   
 $ML = LN$  (KL-мед.)  $\Rightarrow$  LF - средняя линия  $\triangle KMN$

$LF = \frac{MP}{2} = KL \Rightarrow \triangle KLF$  - равноб.  $\Rightarrow \angle FKL = \angle LFK = \beta$   
 $\angle PML = \angle MLO = \alpha$  (напр. при  $MP \parallel OF$  сек. MN)  
 $\angle MLO = \angle FLN = \alpha$  (верт. уг.)  $\Rightarrow \angle KLF = \angle KLN - \angle FLN = 90^\circ - \alpha$

в  $\triangle KFL$ :  
 $\beta + \beta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$  (по т. о. сумме углов треугольника)  
 $2\beta - \alpha = 90^\circ$

1)  $\alpha = 2\beta - 90^\circ$  ✓  
 в  $\triangle KMN$ :  
 $2\beta + 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$  (по т. о. сумме углов треугольника)  
 $2\alpha + \beta = 90^\circ$  (подставим 1)  
 $2(2\beta - 90^\circ) + \beta = 90^\circ$   
 $4\beta - 180^\circ + \beta = 90^\circ$   
 $5\beta = 270^\circ$   
 $\beta = 54^\circ$   
 $\angle KMN = 2 \cdot \beta = 2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$

Ответ:  $108^\circ$

