Шифр 08223

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
~~12б~~ 19б	22.03.24	Гендинио	

1	2	3	4	5
8 / 7	1	7	1	3

Задача 1

$3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36}$ рассмотрим деление это числа на 7:

Степени тройки	ост на 7
3^1	3
3^2	2
3^3	6
3^4	4
3^5	5
3^6	1
3^7	3 — цикл снова

Степени двойки	ост. на 7
2^1	2
2^2	4
2^3	1
2^4	2 — цикл снова

$\Rightarrow$ $3^{62} : 7$ — остаток 2

$2^{36} : 7$ — остаток 1

$-(3^{31} \cdot 2^{18})$ — остак -3

$\Rightarrow 3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36} \equiv 2 - 3 + 1 \pmod 7 \Rightarrow 3^{62} - 3^{31} \cdot 2^{18} + 2^{36} \underset{7}{\equiv} 0$

$\Rightarrow$ Число делится на 7, а само число намного больше семи $\Rightarrow$ Число составное #ЧТД места для скобы

Шифр 08223

Задача 2

$x^2 + kx + k = 0$ => Корни этого уравнения:

$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k(k-4)}}{2}$ (по дискриминанту). Чтобы хотя бы один

корень был целым, то $\sqrt{k(k-4)}$ - тоже целое число

Тут всего два множителя =>: либо $k=0$, либо $k = k-4$.

1) $k=0$ - этот вариант нам подходит

2) $k = k-4$!? - противоречие $0 \neq -4$

=> Уравнение $x^2+kx+k=0$ имеет целые корни только при $k=0$

Ответ: $k=0$.

1 б

Найти:

$\omega = 100\% \cdot \frac{x+x_1}{y+y_1+z}$ - ?

Задача 3

Пусть в первом слитке x - золота, вся его масса - y

Пусть во втором слитке x_1 - золота, вся его масса - y_1

Пусть алюминия в третьем слитке - z.

Из условия имеем:

$$\begin{cases} \frac{x+x_1}{y+y_1} = \frac{3}{10} \\ \frac{x}{y+z} = \frac{2}{10} \\ \frac{x_1}{y_1+z} = \frac{2}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+y_1 = \frac{10}{3}(x+x_1) \\ y+z = 5x \\ y_1+z = 5x_1 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{5}{6}(x+x_1)$$

7 б

Подставим в искомое выражение $\omega = 100\% \cdot \frac{x+x_1}{y+y_1+z}$:

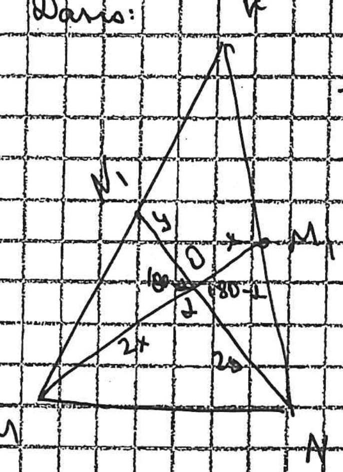
$$\Rightarrow \omega = 100\% \cdot \frac{x+x_1}{\frac{10}{3}(x+x_1)+\frac{5}{6}(x+x_1)} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\frac{10}{3}+\frac{5}{6}} \cdot 100\% = 24\%$$

Ответ: 24 %

Задача 5

Доказать: $MK + NK > 3MN$, если $\angle MON \le 90$

Дано:



Пусть $\angle MON = \alpha$,

тогда $\cos\angle MON = -\cos\angle MON_1$.

Пусть $NO = 2y$; $N_1O = y$; $MO = 2x$; $OM_1 = x$

(т.к медианы точкой пересечения делятся 2:1, начиная от вершины.

По теореме косинусов.

3б

$MN = \sqrt{4x^2+4y^2-8xy\cdot\cos\alpha}$; $MK = 2\sqrt{4x^2+y^2+4xy\cos\alpha}$; $NK = \sqrt{4y^2+x^2+4xy\cos\alpha}$

Докажем, что $9MN^2 < MK^2 + 2MK\cdot MN + NK^2$ (возвели в квадрат исходное утверж.)

Приведем подобные:

$2x^2 + 2y^2 - 26xy\cdot\cos\alpha < \sqrt{(4x^2+y^2+4xy\cos\alpha)(4y^2+x^2+4xy\cos\alpha)}$

Т.к при $\cos\alpha = 0$, т.е $\alpha = 90$ достигается максимум левой части, то если $\cos\alpha$ увеличивается (т.к $\alpha \in (0; 90]$) то неравенство сохраняется т.к правая часть увеличивается!

Докажем для $\alpha = 90$.

$$(2x^2+2y^2)^2 < 4x^4 + 17x^2y^2 + 4y^4$$

$$8x^2y^2 < 17x^2y^2$$, т.к $x>0$, $y>0$ это всегда так

=> Мы доказали утверждение для максимума левой части, минимума правой => $3MN < NK + MK$ при $\angle MON$ – нетупом

ЧТД #

Задача 4

$$\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

К каждому неравенству в левой части добавим буковку из знаменателя и почленно поделим:

$$\frac{a+b+1-b}{b+1}+\frac{b+1+c-c}{c+1}+\frac{c+1+a-a}{a+1}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\quad 3+\frac{a-b}{b+1}+\frac{b-c}{c+1}+\frac{c-a}{a+1}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$$

Теперь добавим к дробям в правой части в знаменатель по "1" от этого дроби уменьшатся, и если мы после этого докажем неравенство, то мы докажем исходное =>

$$\Rightarrow\quad 3+\frac{a-b}{b+1}+\frac{b-c}{c+1}+\frac{c-a}{a+1}\leq\frac{a}{b+1}+\frac{b}{c+1}+\frac{c}{a+1}$$

$$\Rightarrow\quad 3-\frac{b}{b+1}-\frac{c}{c+1}-\frac{a}{a+1}\leq 0$$

А, так как $\frac{b}{b+1}<1$, $\frac{c}{c+1}<1$, $\frac{a}{a+1}<1$, то неравенство верно всегда для $a>0$, $b>0$, $c>0$ $\left(\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}+\frac{a}{a+1}<3\right)$

=> т.е. мы уменьшили дробь в правой части, но все равно доказали неравенство

Следовательно:

$$\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}\leq\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\quad\text{при } a>0,\ b>0,\ c>0$$

$\boxed{\text{ЧТД}}$ #