

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
23		Кореньков	К
Шифр			040112

№1 $x > y, \frac{x+y}{x-y} = ?$

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

1) сократим уравнение $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$ на 2

$$2x^2 + 2y^2 = 5xy \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0$$

2. разделим $2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0$ на $y^2 \neq 0$

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 - 5\frac{x}{y} = 0$$

1	2	3	4	5	Σ
7	2	7	0	7	23

М

3. введем новую переменную $\frac{x}{y} = z$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

$$\text{Дискриминант} = 5^2 - 4(2 \cdot 2) = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} z = 2 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 2 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 2y$$

$\frac{x}{y} \neq \frac{1}{2}$ так как $x > y$

4. подставим $x = 2y$ в $\frac{x+y}{x-y}$

$$\frac{2y+y}{2y-y} = \frac{3y}{y} = 3$$

Ответ: 3

№2

пусть $a^2 - a = n$, $a^4 - a = y$, где n и y - целые числа

1. выразим a^2 2. решим уравнение $a^4 - a = y$ как $(a^2)^2 - a = y$

$$a^2 = a + n$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

3. представим $a^2 = a + n$ в $(a^2)^2 - a = y$

$$(a+n)^2 - a = y \Rightarrow a^2 + 2an + n^2 - a = y$$

$$n^2 + 2an + (a^2 - a) = y$$

$$a^2 - a = n$$

4. представим вместо $a^2 - a$ n

$$n^2 + 2an + n = y$$

5. вынесем n за скобку

$$n(n + 2a + 1) = y \quad \text{Так как } n - \text{целое, } y - \text{целое} \Rightarrow 2a - \text{целое}$$

$$\text{т.к. } a^2 - a = n$$

$$a^2 - a - n = 0$$

$$\text{Дискриминант} = 1^2 + 4n$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$$

$$2a = 1 \pm \sqrt{1+4n} - \text{целое} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+4n} = x \Rightarrow 1+4n = x^2 \Rightarrow 4n = x^2 - 1^2$$

$$4n = (x-1)(x+1)$$

предположим, что:

$$\begin{cases} x-1=4 & \text{тогда } x=5 \\ x+1=n & \text{тогда } n=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1=4 & \text{тогда } x=3 \\ x-1=n & \text{тогда } n=2 \end{cases}$$

6. представим $n=6$ в $a^2 - a - n = 0$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$\text{По т. Виета: } \begin{cases} a = +3 \\ a = -2 \end{cases} - \text{целые числа}$$

7. представим $n=2$ в $a^2 - a - n = 0$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$$\text{по т. Виета: } \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases} - \text{целые числа}$$

Докажем, что a - целое число

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

N 3

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

1. Сгруппируем 1 и 4, 2 и 3

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{n^4} = \frac{(n^4 - 1)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1)}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)(n^2+1)}{n^4}$$

$$\frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} = \frac{2n^2 - 2}{n^3} = \frac{2(n^2 - 1)}{n^3} = \frac{2(n-1)(n+1)}{n^3}$$

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)(n^2+1)}{n^4} + \frac{2(n-1)(n+1)}{n^3}$$

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^3} \left(\frac{n^2+1}{n} + \frac{2n}{n} \right)$$

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}$$

подставим вместо n числа от 2 до 75

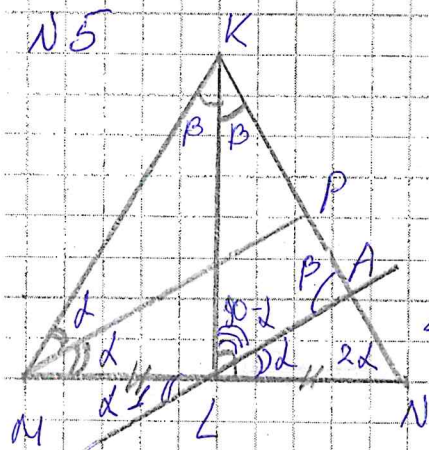
$$\frac{1 \cdot 3^3}{2^4} + \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} + \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} + \frac{4 \cdot 6^3}{5^4} + \dots + \frac{74 \cdot 76^3}{75^4} =$$

$$= \frac{1 \cdot 80^3}{2^4 \cdot 79} = \frac{2^3 \cdot 40^3}{2^4 \cdot 79} = \frac{64000}{79}$$

Ответ: $\frac{64000}{79}$

+

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			



т.к. $\triangle MKN$ - равнобедр. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow KL$ - бисс., медиана, высота

пусть $\angle MKE = \angle LKN = y$

$\angle KMP = \angle PMN = x$ $\angle N = 2x = \angle M$

$\triangle MKE$ - прямоугольный: $\angle KEM = 90^\circ$

по т. о сумме $\angle \Delta$: $2x + y = 90^\circ$

Проверим прямую LA, перпендикулярную MN

MP ^{перпендикулярно} LA

$LA \parallel MP$

т.к. L - середина MN $\Rightarrow ML = LN$

$\Rightarrow LA$ - средняя линия $\triangle MPN \Rightarrow \angle A = \frac{1}{2} MP$

$KL = \frac{1}{2} MP \Rightarrow \angle A = KL \Rightarrow \triangle KLA$ - равнобедренный

т.к. $MP \parallel LA$, то $\angle 1 = x$ (на $\angle$ при $MP \parallel LA$ и сек. ML)

, тогда $\angle ALN = x = \angle 1$ (вертикальные)

т.к. $\triangle KLA$ - равнобедр. $\Rightarrow \angle KAL = y$

$\angle KLN = \angle ALN + \angle KLA = 90^\circ \Rightarrow \angle KLA = 90 - x$

по теореме о Σ углов Δ :

$$\begin{cases} 2x + 2x + 2y = 180 \\ 2y + 90 - x = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2x + 2y = 180 \\ 2y + 90 - x = 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2x + 2y = 180 \\ 2y + 90 - x = 180 \end{cases}$$

Отнимем от 1-го уравн 2

$$5x = 90 \Rightarrow x = 18^\circ$$

подставим x в 2-е $2x + y = 90$

$$36 + y = 90$$

$$y = 54^\circ \Rightarrow \angle MKN = 2 \cdot 54 = 108^\circ$$

Ответ: 108°