Шифр 08090

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
11	20.03	Коряковцева Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
4	4	0	0	3	11

№1 Пусть четырехзначное число $n = \overline{abcd}$, или же $n = 1000a + 100b + 10c + d$, а сумма его чисел $= a+b+c+d$. Рассмотрим

$f(x) = \frac{1000a+100b+10c+d}{a+b+c+d}$ $f'(x) = \frac{(1000a+100b+10c+d)'(a+b+c+d) - (a+b+c+d)' *}{(a+b+c+d)^2}$

$\frac{* (1000a+100b+10c+d)}{} = \frac{1111(a+b+c+d) - 4(1000a+100b+10c+d)}{a^2+b^2+c^2+d^2+2(a(b+c+d)+b(c+d)+cd)} = \frac{-3889a+711b+1071c+1107d}{a^2+b^2+c^2+d^2+2(a(b+c+d)+b(c+d)+cd)}$. Отметим, что для $f(x)$ min нужно, чтобы $a^2+b^2+c^2+d^2+2(a(b+c+d)+b(c+d)+cd)$ было максимально возможным при минимальном $-3889a+711b+1071c+1107d$. Т.к. $a, b, c, d \in \{0; 1; 2; \dots 9\}$, то $g(x) = -3889a+711b+1071c+1107d$ убывает много быстрее чем возрастает $a^2+b^2+c^2+d^2+2(a(b+c+d)+b(c+d)+cd) = h(x) \Rightarrow a$ должно быть минимальным, (при том стоит уточнить, что $a \neq 0$, т.е. $a \in \{1; 2; 3 \dots 9\}$, а b, c и $d \in \{0; 1; 2 \dots 9\}$), а остальные ~~числа~~ цифры максимальными. Очевидно, что т.к. d отвечает за единичную часть числа, то $d = 9$, т.к. не сильно сильно увеличивает n. То же самое можно сказать и про c. А вот b уже может колебаться в пределах от 0 до 5 примерно. $a = 1$. Оценив все варианты, в получаем такую картину: $1099 : 19 \approx 57{,}53$; $1199 : 20 = 59{,}95$; $1299 : 21 \approx 61{,}8 \dots$

Очевидно, что дальше ~~сум~~ частное будет возрастать. Тогда искомый ответ — число 1099.

Ответ: 1099

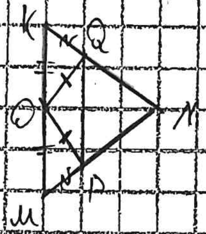
№2 1) $0 < x < \frac{1}{2}$; $0 < y < \frac{1}{2}$ Док-ть: $y^3 - x^3 > y - x$

2) $y^2 - x^2 > y - x$

Распишем (2): $(y-x)(y+x) > y - x \Rightarrow x$ и y никогда не равны друг другу. При $y \neq x$ (2) верно при любых x и y. Даже не расписывать $y^2 - x^2$, то становится понятно, что $x > y$, чтобы неравенство было верно. Теперь докажем, что $y^3 - x^3 > y - x$

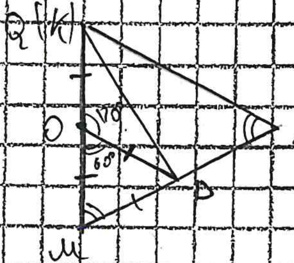
$y^3 - y - x^3 + x > 0 \Leftrightarrow y(y^2-1) > x(x^2-1)$ т.к. (1) $\Rightarrow (y^2-1)$ и $(x^2-1) < 0$, т.к. $x > y \Rightarrow (x^2-1) > (y^2-1)$. Но на данном промежутке ~~$f(x) = x^3 - x$, $g(y) = y^3 - y$ не возрастают сильно быстро~~ $f(x) = x^3$ возрастает медленнее $g(x) = x$, аналогично и с функцией y^3 и $y \Rightarrow$ ~~при больших x~~, при $x > y$ $x^3 - x < y^3 - y$ на данном промежутке. ч.т.д.

№5 Сразу заметим, что если P и Q действительно будут лежать внутри треугольника, то прямая PQ всегда будет параллельна MK. Докажем это. Пусть O – центр MK. Тогда $QO = PO$. $OK = OM \Rightarrow \triangle OKQ = \triangle OMP \Rightarrow$



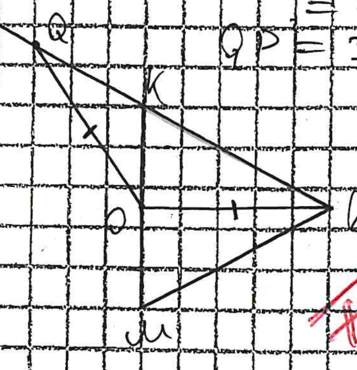
$\Rightarrow KQ = MP \Rightarrow KM \parallel QP$. Значит, одна из точек либо совпадает с вершиной, либо лежит на продолжении стороны. Также отметим, что $\angle QOP = 120°$ при любых положениях точек Q и P. Разберем 2 критических случая и на их основе получим ответ: точка Q совпадает с K и точка P совпадает с N. Перед этим определим чему равна сторона треугольника, обозначим ее за a. $S = \frac{1}{2}a^2 \sin 60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 1$ (по условию $S = 1$) $\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

1) $Q = K$. $OK = OP = \frac{a}{2}$. Ср. линия $\triangle MNK = \frac{a}{2}$. $\angle KOP = 120°$ (как было сказано ранее) $\Rightarrow \angle POM = 180° - 120° = 60° \Rightarrow \triangle MOP$ равност. $\Rightarrow OP = MP = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow P$ – середина $MN \Rightarrow OP$ – ср. линия. $KP^2 = OK^2 + OP^2 - 2 OK \cdot OP \cos 120°$ $= 3OK^2 \Rightarrow KP = OK\sqrt{3}$ $OK = \frac{a}{2} = \frac{2}{2\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$



2) $P = N$ PO – высота. $PO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3} \cdot 2} = \sqrt[4]{3}$

$QP = 3OP^2$ (по т. cos) $\Rightarrow QP = OP\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^3}$



Ответ: $QP \in \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}; \sqrt[4]{3^3}\right)$

№4 $\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \cdot \sin^{2025}(x)$

Для выполнения данного равенства нужно, чтобы каждый схожий член был равен другому по модулю, т.е. $|\cos(2x)| = |\sin(x)|$, $|\cos^{2023}(2x)| = |\sin^{2023}(x)|$ и $|2024 \cdot \cos^{2025}(2x)| = |2024 \sin^{2025}(x)|$. Такое возможно при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

неоконч.